

COOPERACIÓN EN LA CADENA DE SUMINISTRO DE LA ENERGÍA ELÉCTRICA EN COLOMBIA

DIANA GINETH RAMÍREZ RIOS



Acreditada institucionalmente
por su excelencia académica.
Resolución MEN
No 2085 - 05/09/2003.

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Diciembre de 2008

**COOPERACIÓN EN LA CADENA DE SUMINISTRO DE LA ENERGÍA ELÉCTRICA EN
COLOMBIA**

DIANA GINETH RAMÍREZ RIOS

**Tesis de grado presentada como requisito parcial
para optar por el título de Magíster en Ingeniería Industrial,
Área de énfasis en Gestión Industrial.**

DIRECTOR: Ing. Carlos Paternina Ph.D

**UNIVERSIDAD DEL NORTE
División de Ingenierías
Departamento de Ingeniería Industrial
Barranquilla, Colombia
Diciembre de 2008**

Nota de aceptación:

Carlos D. Paternina Arboleda, Ph.D.
Director

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	1
1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	3
1.1. ANTECEDENTES	3
1.1.1. Optimización en la Cadena de Suministro	3
1.1.2. Optimización en la Cadena de Suministro de la Energía	4
1.1.3. Teoría de Juegos	5
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	6
1.3. JUSTIFICACIÓN	7
2. OBJETIVOS	9
2.1. OBJETIVO GENERAL	9
2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	9
3. MARCO TEÓRICO	10
3.1. TEORÍA DE JUEGOS.....	10
3.1.1. Formas del Juego	10
3.1.2. Juegos Cooperativos	11
3.1.3. Modelos Clásicos de Oferta	27
3.2. ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO DEL VALOR DE SHAPLEY	31
3.2.1. El Potencial de Hart y Mas-Collel	31
3.2.2. Dividendos de Harsanyi	33
3.3. ESTRUCTURA DEL MERCADO ELÉCTRICO COLOMBIANO	34
3.3.1. Aspectos Institucionales	34
3.3.2. Actividades del Sector Eléctrico	35
3.3.3. Transacciones a través del MEM	35
3.4. ESTADO DEL ARTE	36
4. DISEÑO METODOLÓGICO	40
4.1. TIPO DE ESTUDIO.....	40
4.2. METODOLOGÍA.....	40

4.3. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN.....	41
4.4. FUENTES DE INFORMACIÓN	42
5. MODELO DE OFERTA DE LA ENERGÍA	43
5.1. FORMULACIÓN DEL MODELO	43
5.1.1. Definición del modelo matemático del la cadena de suministros de la energía	43
5.1.2. Definición del juego cooperativo entre comercializadores	44
5.2. PROCEDIMIENTO PARA SOLUCIONAR EL MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO	46
5.2.1. Solución matemática al modelo	46
5.2.2. Algoritmo Stackelberg-Cooperativo	49
5.2.3. Implementación del algoritmo	50
5.2.4. Cálculo de la complejidad del algoritmo	50
5.3. EJEMPLO NUMÉRICO: MERCADO ELÉCTRICO COLOMBIANO	51
5.4. RESULTADOS COMPUTACIONALES	52
6. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES	57
BIBLIOGRAFÍA	60
ANEXO A.....	64
ANEXO B	73

LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

Figura 1: Algoritmo PACT	19
Figura 2: Representación grafica del modelo propuesto.	40
Figura 3. Plantilla de Shapley	49
Tabla 1. Capacidades (kWh) para los generadores	47
Tabla 2. Precios (\$/kWh) por energía vendida entre generadores y comercializadores.	47
Tabla 3. Precios (\$/kWh) de energía vendida entre comercializadores y usuarios no regulados. ...	47
Tabla 4. Demanda pronosticada de los usuarios no regulados.	48
Tabla 5. Valores optimizados por subconjunto generado.	48
Tabla 6. Cantidades (en kWh) que debe negociar cada comercializador con cada usuario.	50
Tabla 7. Valores de Shapley calculados para este problema.	50
Tabla 8. Comparación de las utilidades generadas por el modelo.	51

INTRODUCCIÓN

Anteriormente, se había visto que la industria de energía eléctrica era controlada por un monopolio, en todas las partes interesadas de la cadena. Pero, al pasar de los años, se ha observado un proceso de desregulación, en el que la interacción de los diferentes agentes de la cadena de la energía todavía no se ha observado. En un sector altamente competitivo como el eléctrico, cada generador busca obtener el mayor beneficio económico, mientras que las compañías comercializadoras deben estar coordinadas para así satisfacer las necesidades del cliente. La dificultad de tener tanta competencia entre los diferentes miembros de la cadena de suministro surge del hecho que la energía es un producto básico que debe ser producido en cantidades altas para prevenir apagones y, al mismo tiempo, es imposible almacenarlo para periodos futuros.

En el sistema colombiano de energía eléctrica, el gobierno, no sólo asume la regulación, control y supervisión de la energía, sino que también promueve la competencia entre cada una de las partes interesadas, como lo son los entes de generación, transmisión, distribución y comercialización. El gobierno también promueve la libre contratación en los usuarios, cuyos consumos excedan los 55000 kW/mes, los llamados usuarios no regulados; y manteniendo precios regulares para los demás usuarios, denominados los usuarios regulados.

La Comisión de Regulación de Gas y Energía (CREG) es la encargada de generar formulas para permitir que los comercializadores establezcan costos que les permitan ofrecer el servicio a los usuarios regulados por medio del Sistema de Interconectado Nacional (SIN). Sin embargo, cuando se refiere a los usuarios no regulados, la negociación se maneja por medio de unos contratos bilaterales. Los contratos bilaterales son acuerdos comerciales de compra y venta de energía, entre generadores y comercializadores o entre sólo comercializadores, para satisfacer parcial o completamente, la necesidad del usuario. Los contratos bilaterales hechos a largo plazo, no implican la entrega de energía física de la energía.

La presente investigación presenta la problemática que existe en la negociación de la energía en la industria colombiana. En esta, solo se analizan tres partes importantes dentro de la cadena de suministro de la energía: los generadores, los comercializadores y los usuarios no regulados. Para poder optimizar la cadena, es necesario tener en cuenta las necesidades de cada una de las partes interesadas. Sin embargo, si se optimizara la función de cada uno de los agentes, se tendría una optimización multiobjetivo que implicaría, quizás, indefinido número de funciones cuando no se sabe con certeza, cuantas entidades actúan dentro de la cadena.

En la teoría de juegos se han contemplado problemas similares de optimización en una cadena de suministros, considerando a cada uno de los agentes que están compitiendo dentro de la cadena, para obtener un mayor beneficio. Sin embargo, al competir unos con otros, nunca se podría llegar a un equilibrio debido a que los objetivos que persiguen unos son directamente conflictivos con otros. Por ello, la teoría de juegos no cooperativa no funcionaría en este tipo de problemas, pero la teoría de juegos cooperativa permite establecer acuerdos entre ambas partes y, por tanto, se considera como enfoque de solución para la problemática presentada en la presente investigación.

1. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.1. ANTECEDENTES

1.1.1. Optimización en la Cadena de Suministro

Son muchos los modelos que se han implementado para la optimización de las cadenas de suministro, dependiendo del tipo de cadena que se está manejando. Sin embargo, en general, cualquier cadena de suministros se puede modelar como un grafo, como una red dirigida, en el cual se considera el flujo de material, el cual va de nivel a nivel, partiendo desde el primer proveedor de la cadena hasta el consumidor o usuario final de la misma.

Los modelos de optimización de las cadenas de suministro pueden ser lineales o no lineales, dependiendo de la complejidad el problema. Las cadenas que consideran múltiples productos, conversión de materia prima, inventarios, restricciones de capacidad, restricciones de transporte o bodegaje; pueden llegar a ser no lineales. También la complejidad radica en lo que se está optimizando y en la información que se maneja. En general, un modelo de optimización de cadenas de suministro busca minimizar costos o maximizar utilidades. Muchos de los problemas en la industria con este tipo de modelos es la falta de información suministrada. Por ello, se ha visto en la literatura mayor número de modelos que intentan resolver esos problemas de incertidumbre, haciendo pronósticos o trabajando modelos dinámicos. Lario y otros autores, quienes participaron en un proyecto de aplicación a las organizaciones y trabajaron la problemática de la incertidumbre, consideran la optimización de la cadena como *“la mejor manera de utilizar los recursos disponibles en los proveedores, fábricas, almacenes y distribuidores en el horizonte de planificación.”*¹

¹ (LARIO, 1999), p.1

1.1.2. Optimización en la Cadena de Suministro de la Energía

La energía es un bien básico, el cual posee unas características importantes que lo diferencian de cualquier otro producto o bien básico del mercado. La energía es un bien que no puede ser almacenado para futuros periodos y además no puede agotarse debido a que ello implicaría grandes apagones, que ocasionarían grandes pérdidas para la sociedad.

Dentro del mercado eléctrico se pueden observar cinco grandes participantes de la cadena de abastecimiento de la energía: generadores, transmisores, distribuidores, comercializadores y usuarios. Los generadores son aquellos que producen grandes cantidades de energía a partir de plantas de generación hidráulica y térmica. La energía generada es vendida a los comercializadores a precios que fluctúan dependiendo de la demanda y la oferta de la energía. Los transmisores son aquellos que transportan la energía por medio de redes de alta tensión, las cuales superan los 220kV de voltaje y que interconectan los puntos de generación a grandes centros de consumo. En Colombia, la Interconexión Eléctrica S.A. (E.S.P.) posee el 75% de los activos de la red. Los distribuidores son aquellos que transportan energía a través de un conjunto de líneas y subestaciones, energía que va dirigida al servicio municipal, distrital y local, la cual opera a tensiones menores de 220kV. Los comercializadores son aquellos que compran grandes cantidades de energía y se las vende a los usuarios. Ellos se encargan de la facturación y del pago a todos los actores de la cadena, mas no del transporte de la misma. Los usuarios se pueden subdividir en dos: usuarios regulados y no regulados. Los usuarios no regulados son los grandes consumidores, aquellos que consumen más de 55MWh de energía. Los usuarios regulados, por su parte, son todos los pequeños consumidores que no logran ser catalogados como usuarios no regulados y poseen un contrato con condiciones uniformes y tarifas reguladas por la CREG (Comisión de Regulación de Energía y Gas).

En el mercado eléctrico se busca, principalmente, satisfacer las necesidades de los usuarios, con los más altos estándares de calidad en el suministro de la energía y a precios razonables. Se han presentado, por lo tanto, las siguientes relaciones entre las diferentes partes de la cadena: Generador – Comercializador, Comercializador – Usuario, Generador – Usuario.

1.1.3. Teoría de Juegos

La teoría de juegos surge desde 1928 por John Von Neumann, sin embargo, fue en 1944 que se hizo una aproximación a problemas competitivos y de cooperación en el libro de Neumann y Morgenstern, *"The Theory of Games and Economic Behavior"*, en el que estableció el concepto de juegos cooperativos de n personas e introdujeron la solución del juego. De ahí en adelante, se ha trabajado sobre ambos tipos de juegos y la gran cantidad de variaciones de los mismos. Su aplicación se ha visto no sólo en la economía, sino también en diversas áreas como lo son: la biología, psicología e ingenierías.

Recientemente, se han observado varias herramientas de la teoría de juegos utilizadas para el análisis del mercado eléctrico. Dependiendo de su estructura, se han aplicado una serie de modelos para representar el comportamiento de los agentes participantes de la cadena de la energía. Inicialmente, se adaptaron modelos clásicos de la economía, como lo son los monopolios, oligopolios, competitivos y regulados. Uno de los primeros modelos analizados, como lo es el modelo de Cournot, fue empleado para representar el comportamiento de los precios de suministro de la energía. Sin embargo, este modelo mostró ineficiencias en el mercado eléctrico de varios países, como lo es en Estados Unidos e Inglaterra (Borgenstern, et. al. 2002; Wolfram, 1999). Igualmente, se han considerado una gran cantidad de aplicaciones al modelo del mercado eléctrico, en cuyos casos, se han introducido modelos de equilibrio basados en competencia imperfecta (CONTRERAS J. e., 2004).

Igualmente, los problemas de optimización de la cadena de suministros se ha manejado desde la óptica de la teoría de juegos en el que se ha permitido trabajar, principalmente, con situaciones en el que la demanda es incierta y en el que se optimiza a partir de una función global del sistema o a partir de las optimizaciones independientes de cada actor dentro de la cadena.

1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Gracias a la desregulación del mercado de la energía a nivel mundial, se ha visto una mayor libertad en cuanto al manejo de la compra y venta de la energía. En el mercado colombiano, en particular, se ha establecido un mecanismo en cuanto a los precios de compra y venta de energía de acuerdo a las fluctuaciones del mercado en la bolsa de valores. Esto permite que la competencia entre las diferentes partes se promulgue y esto beneficie al consumidor final.

Sin embargo, siempre que una parte interesada de la cadena se está beneficiando, la otra parte se está afectando y esa competencia ha permitido que no se establezca una metodología eficiente en cuanto a la producción y a la comercialización de la energía. Los servicios de compra y venta de energía a los usuarios regulados están sometidos a un contrato con condiciones uniformes, a diferencia de los usuarios no regulados, los cuales tienen una relación directa de compra y venta de energía por medio de contratos bilaterales. En la actualidad se ha visto que, debido a las constantes fluctuaciones de la demanda, se vuelve ineficiente hacer contratos a largo plazo y mucho más si todas las entidades actúan de manera independiente y competitiva.

En la presente investigación se plantea un problema existente en el mercado eléctrico colombiano con algunas empresas del sector. Para ello, se considera un problema de optimización entre generadores, comercializadores y usuarios no regulados. La demanda es considerada determinística debido a que esta ha sido previamente pronosticada. Se busca optimizar la utilidad de ambos generadores y comercializadores, sin embargo, sus funciones de utilidad son conflictivas, es decir, el mejoramiento de una función empeora la otra. Recientemente, se trabajó una optimización bi-nivel para este mismo problema², se optimizan todas las funciones, tanto de generadores como de comercializadores. En esta investigación se busca implementar un modelo de cooperación que permita continuar lo iniciado por la programación bi-nivel, pero que busque alternativas de cooperación entre comercializadores con el fin de optimizar sus ganancias.

1.3. JUSTIFICACIÓN

² Ver (GUZMAN, 2007).

Debido a que en el mercado eléctrico se busca satisfacer las necesidades de los usuarios finales en el suministro de la energía a precios razonables, este problema planteado se refiere al manejo eficiente de la energía que será entregada al usuario final. Una coordinación eficiente de la cadena de suministros, no solamente entregará la cantidad que el cliente necesita sino al precio que lo necesita. Sin dejar a un lado la libre contratación de la energía establecida por la ley, las diferentes entidades que actúan en esta cadena deben dejar de pensar en su propio beneficio y empezar a pensar en acuerdos conjuntos para lograr abordar una mayor parte del mercado sin riesgo alguno.

La teoría de juegos cooperativa ofrece herramientas para poder lograr este tipo de acuerdos, ya que esta permite dividir las utilidades de la mejor manera posible y formar alianzas estratégicas entre jugadores. Esta formación de alianzas o lo que llamaremos coaliciones entre jugadores, será el enfoque principal de esta investigación y cómo el valor de la coalición se reparte entre ellos mismos.

2. OBJETIVOS

2.1. OBJETIVO GENERAL

Formulación del modelo de oferta de la energía por medio de la optimización de la cadena de suministro de la energía del mercado no regulado en busca de la maximización de utilidades tanto de los generadores como de los comercializadores, y logrando, al mismo tiempo, la coordinación de la cadena por medio del uso de la teoría de juegos cooperativa.

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Obtener una solución factible al modelo de optimización de la cadena de suministros de la energía.
- Implementar la teoría de juegos cooperativa en la formación de coaliciones de este modelo de optimización, así como la equitativa repartición de utilidades entre los participantes del juego.
- Desarrollar un algoritmo de programación para el modelo de oferta de la energía que sea verificable con otros modelos de optimización por medio de la generación y comparación de resultados obtenidos.

3. MARCO TEORICO

3.1. TEORIA DE JUEGOS

3.1.1. Formas del juego

El estudio de problemas reales con los principios de la teoría de juegos se puede desarrollar en tres modelos matemáticos principales, los cuales corresponden a la forma extensiva, estratégica y de coalición. Estos tres modelos difieren en la cantidad de detalle necesitada en el juego para obtener el modelo y este depende del contexto de la situación analizada.

La forma extensiva del juego básicamente se define en tres aspectos, los cuales son: la posición del jugador, el movimiento durante el juego (el cual puede ser aleatorio o puede seguir una distribución de probabilidad) y la información utilizada por los jugadores cuando realizan el movimiento deseado. Si cada jugador conoce los movimientos del pasado y la utilidad adquirida en las pasadas jugadas, el juego se conoce por tener información perfecta, de lo contrario, es un juego con información imperfecta.

La forma estratégica del juego consiste en dos elementos principales, la estrategia y el pago obtenido, tanto la posición como el movimiento no es importante para este modelo. Cada jugador escoge una estrategia de un conjunto de posibles estrategias. Todos los jugadores toman la decisión simultáneamente y el juego culmina en el momento en que cada estrategia es revelada y cada jugador recibe el correspondiente pago.

Los juegos también pueden ser subdivididos en juegos suma-cero y suma-no nula. El primer tipo de juego existe de forma estratégica, en el que la suma de sus utilidades es cero. Los juegos de suma-no nula son formas más generales del juego y pueden existir de manera no-cooperativa y cooperativa. Los juegos cooperativos será el enfoque principal de esta investigación.

La forma de coalición el juego existe en juegos cooperativos con un gran número de jugadores en el que la noción de estrategia desaparece y las principales características de este juego están en la

coalición formada y el valor que obtiene esta misma. Los tipos de juegos cooperativos se dividen en dos categorías: juegos con utilidad transferible (TU) y juegos con utilidad no transferible (NTU). En la siguiente sección se explicará con mayor detalle este concepto.

3.1.2. Juegos Cooperativos

En los juegos cooperativos, los jugadores tienen permitidos formar acuerdos bilaterales, en el que existe un gran incentivo para trabajar en conjunto y ganar el mayor pago posible. El problema con este tipo de juegos radica en la manera en el que la utilidad es repartida entre los jugadores. En ocasiones este reparto no es posible por lo que no existe una forma de transferir la utilidad, sin embargo, cuando la utilidad es transferible, los jugadores miden la utilidad en las mismas unidades y se las reparten de acuerdo a su tasa de transferencia.

Cuando la cantidad de jugadores es tan grande que es difícil de manejar de manera estratégica, la forma de coalición resulta ser la más adecuada. El problema radica en analizar la posibilidad de formar una coalición de parte de los jugadores, de que esa coalición sea estable y de cómo se deben repartir las ganancias entre los miembros de la coalición para que ninguno de ellos esté interesado en romper la coalición.

3.1.2.1. Juegos cooperativos de dos jugadores

Considerando el caso en el que existe cooperación entre dos jugadores, es decir, que los acuerdos bilaterales son permitidos, las estrategias mixtas correlacionadas son aceptadas y la utilidad es transferida de un jugador a otro. En estos casos, existe la posibilidad de que un conjunto de utilidades puedan ser obtenidas por dos jugadores que interactúan juntos, las cuales se pueden ser ubicadas en un plano cartesiano y cuya proyección es cerrada y acotada. El problema planteado se trata realmente de encontrar el punto que mejor satisface los intereses de los jugadores.

Dado un juego bipersonal de suma-no nula, existe un conjunto S , el cual es un conjunto factible, lo que significa que para cualquier $(u, v) \in S$, es posible que, actuando juntos, puedan obtener las

utilidades u y v , respectivamente. Generalmente, se encuentra que lo que gana un jugador es lo que el otro pierde. Entonces, es necesario saber cómo es posible satisfacer ambas partes con el fin de obtener la mayor utilidad en conjunto. Así no se pueda determinar con certeza como el jugador va a reaccionar ante el acuerdo de dejar de ganar utilidad para dársela a otro, es posible saber cuánto es lo mínimo que cada quien debe aceptar. Este valor se puede obtener si se considera cada parte independientemente de la otra. Si se denominan esos valores u^* y v^* , se obtiene:

$$\begin{aligned} u^* &= \max_x \min_y xAy^T \\ v^* &= \max_y \min_x xBy^T \end{aligned} \quad (3.1.2.2)$$

Esto es, para un juego con una bimatriz (A, B), en el que x y y poseen el conjunto de estrategias mixtas.

Asumiendo que, dado un conjunto S , es posible obtener los valores maximin (u^*, v^*) , cuya regla sea la de asignar a una (S, u^*, v^*) , la solución: $\varphi(S, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v})$

Para poder definir una función, es necesario utilizar los axiomas definidos por John Nash, las cuales fueron resumidas por Owen (1995)³:

N1 (Racionalidad Individual) $(\bar{u}, \bar{v}) \geq (u^*, v^*)$

N2 (Factibilidad) $(\bar{u}, \bar{v}) \in S$

N3 (Optimalidad de Pareto) Si $(u, v) \in S$ y $(u, v) \geq (\bar{u}, \bar{v})$, entonces $(u, v) = (u^*, v^*)$

N4 (Independencia de Alternativas Irrelevantes) Si $(\bar{u}, \bar{v}) \in T \subset S$ y $(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(S, u^*, v^*)$, entonces $(\bar{u}, \bar{v}) = \varphi(T, u^*, v^*)$.

N5 (Independencia de Transformaciones Lineares) Dado un conjunto T obtenido de S por la siguiente transformación:

$$u' = \alpha_1 u + \beta_1$$

$$v' = \alpha_2 v + \beta_2$$

Como $\varphi(S, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v})$, se obtiene que

³ (OWEN, 1995), p.191

$$\varphi(T, \alpha_1 u^* + \beta_1, \alpha_2 v^* + \beta_2) = (\alpha_1 \bar{u} + \beta_1, \alpha_2 \bar{v} + \beta_2).$$

N6 (Simetría) Suponga que el conjunto S es tal que

$$(u, v) \in S \Leftrightarrow (u, u) \in S$$

Suponga también que $u^* = v^*$ y que $\varphi(S, u^*, v^*) = (\bar{u}, \bar{v})$, entonces $\bar{u} = \bar{v}$.

De acuerdo con el Teorema IX.1.2.⁴, es posible definir una única función φ en todos los problemas expresados como (S, x^*, y^*) que satisfacen los axiomas anteriormente expuestas. El Lema IX.1.3⁵ establece que para cualquiera de los puntos $(u, v) \in S$, tal que $u > u^*, v > v^*$, existe un único punto (\bar{u}, \bar{v}) , el cual maximiza la función $g(u, v) = (u - u^*)(v - v^*)$ en el conjunto S , para el cual $u \geq u^*$.

Con base en estas reglas ya establecidas, se puede obtener un punto (\bar{u}, \bar{v}) en el que exista una línea tangente a una curva de S , dado que el conjunto S sea convexo. La pendiente de esta línea representa la tasa de transferencia de utilidad de un jugador a otro. Esto establece entonces que la utilidad adicional debe ser repartida entre los dos jugadores a una razón igual que la tasa de transferencia correspondiente.

En el caso más sencillo, si la utilidad fuera linealmente transferible, la solución de Nash sería (\bar{u}, \bar{v}) , en el que

$$\bar{u} = (u^* - v^* + k) / 2 \text{ y } \bar{v} = (v^* - u^* + k) / 2. \quad (3.1.2.3)$$

3.1.2.2. Juegos cooperativos de múltiples jugadores

En juegos de n-jugadores, cada uno de los jugadores puede hacer acuerdos con otros para que la utilidad sea repartida entre ellos. Estos acuerdos se representan por medio de coaliciones, las cuales pueden ser de dos o más jugadores o la llamada gran coalición que está conformada por todos los jugadores.

⁴ (OWEN, 1995), p.192

⁵ Ibid., p.192

Los elementos $N = \{1, 2, \dots, n\}$ se denominan jugadores, los subconjuntos $S \in 2^n$ coaliciones y $v(S)$ que representa el valor de la coalición S . La función v se denomina la función característica del juego la cual permite que el juego (N, v) sea identificado mediante su función característica. La estructura de la coalición $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ de las m coaliciones formadas debe satisfacer las tres condiciones:

1. $S_j \neq \emptyset$
2. $S_i \cap S_j = \emptyset$
3. $\bigcup_{i=1}^m S_i = N$ (gran coalición)

La definición de la función característica fue introducida por Von Neumann y Morgenstern (1944) y establece que para cada subconjunto S de N , la función característica v de juego ofrece la mayor cantidad $v(S)$ que todos los miembros de S están seguros de recibir si se unen y forman una coalición. La restricción que acompaña esta restricción es que el valor de un conjunto vacío es 0, es decir, $v(\emptyset) = 0$. También se establece la función de superatividad, el cual se expresa como:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \text{ para cualquier } S, T \subseteq N, \text{ tal que } S \cap T = \emptyset \quad (3.1.2.2)$$

Esta última propiedad es importante para determinar que el pago total de la gran coalición es colectivamente racional, porque resulta ser mucho más grande que lo que puede recibir los jugadores independientemente.

3.1.2.3. Conceptos de solución

Una vez obtenido el valor que maximiza la utilidad de cada uno de los jugadores que se deciden coalicionar, es necesario saber hacer la distribución de la cantidad $v(N)$. Esta puede ser representada por un vector x , el cual debe satisfacer el *principio de eficiencia*, es decir,

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \quad (3.1.2.4)$$

La mayor cantidad de conceptos de solución propuestos para los juegos cooperativos deben cumplir el llamado *principio de individualidad racional*, en el que se establece que

$x_i \geq v(\{i\}) \forall i \in N$. Las preimputaciones que verifican este principio se llaman imputaciones del juego (N, v) , denotándose $I(v)$ el conjunto de todas ellas. Este principio, junto con la propiedad de superatividad de las coaliciones, se obtiene el primer concepto de solución, llamado el *core* del juego. Este concepto de solución fue introducido por Gillies y se define como el conjunto

$$C(v) = \{x \in R^n : x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), \forall S \in 2^n\},$$

Donde, $x(S) = \sum_{i \in S} x_i$ y $x(\emptyset) = 0$.

Como se puede observar, es posible que se dé el caso en el que el *core* del juego sea vacío.

El concepto de solución tipo Kernel también es utilizado, en el que los agentes son organizados en un conjunto de coaliciones $C=\{C_i\}$ y sus excedentes son calculados como lo muestra la siguiente ecuación 3.1.2.6.

$$e(C) = v(C) - \sum_{A_i \in C} u^i \quad (3.1.2.6)$$

En donde, u^i es el pago del agente i y $v(C)$ es el pago que obtiene toda la coalición.

El máximo excedente S_{AB} del agente A sobre el agente B, con respecto a la configuración coalicional está definido en las ecuación 3.1.2.7.

$$S_{AB} = \max_{C|A \leftarrow C, B \notin C} e(C) \quad (3.1.2.7)$$

El agente A supera al agente B si $S_{AB} > S_{BA}$ y $u^B > v(B)$. Si ninguno de los agentes logra superar el uno al otro, entonces están en equilibrio. Es decir, una de las siguientes condiciones se debe cumplir para el equilibrio:

1. $S_{AB} = S_{BA}$
2. $S_{AB} > S_{BA}$ y $u^B = v(B)$
3. $S_{AB} > S_{BA}$ y $u^A = v(A)$

Una coalición estable Kernel (K-stable) es un conjunto de configuraciones coalicionales, tal que cada par de agentes dentro de la misma coalición está en equilibrio.

El núcleo es un tipo de solución que utiliza los excedentes de cada uno de los subconjuntos $S \subset N$ de un juego de s jugadores. Se define por medio de la siguiente ecuación:

$$\theta_k(x) = e(S_k, x) \quad (3.1.2.8)$$

Siendo S_1, S_2, \dots, S_{2^n} subconjuntos de N , ordenados de acuerdo a la siguiente relación:

$$e(S_k, x) \geq e(S_{k+1}, x) \quad (3.1.2.9)$$

Es por medio de este ordenamiento que se asignarán los vectores de pago, x , en los diferentes subconjuntos. El núcleo del juego, v , sobre un conjunto X , es un conjunto $v(X)$ definido en la ecuación 3.1.2.10.

$$v(X) = \left\{ x \mid \begin{array}{l} x \in X \\ \text{si } y \in X, \text{ent. } x \leq y \end{array} \right\} \quad (3.1.2.10)$$

Pero ninguno de estos conceptos de solución evitaba que el *core* fuese vacío. Sin embargo, Shapley introdujo el concepto de coaliciones equilibradas y el juego equilibrado para determinar si el juego tiene o no un *core* vacío.

Definición de coaliciones equilibradas⁶

Dado un juego (N, v) , una colección $\{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ del subconjunto de N , distintos y no vacíos, se dice que es equilibrada sobre N si existen números positivos $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ –denominados pesos– tales que para todo $i \in N$,

$$\sum_{\{j: i \in S_j\}} \alpha_j = 1 \quad (3.1.2.11)$$

Definición de juego equilibrado⁷

Si para cualquier solución equilibrada sobre N , se verifica que, $\sum_{j=1}^m \alpha_j v(S_j) \leq v(N)$, entonces el juego (N, v) es equilibrado.

⁶ (FERNANDEZ GARCIA, 2000), p.37

⁷ Ibíd. p.38

Otros dos conceptos de solución son los *conjuntos estables* de Von Neumann y el *conjunto de negociación* de Aumann y Maschler. Estos dan solución a juegos cooperativos de utilidad transferible cuando el subconjunto del conjunto de imputaciones no es vacío. También existen otros conceptos de solución propuestas como el valor de Shapley y el valor de Banzhaf-Coleman, los cuales asignan a cada jugador un único elemento del conjunto de preimputaciones.

Valor de Shapley

Recientemente, uno de los conceptos de solución más reconocidos en la literatura ha sido el valor de Shapley, ya que es uno de los únicos valores que cumple con todas las propiedades que el vector de preimputaciones para cualquier coalición debe tener en un juego cooperativo. Shapley llegó a este valor de manera axiomática, es decir, que para cada valor del juego v , tenemos un n -vector, $\phi_i(v)$, que cumple con los siguientes axiomas⁸:

S1. Si S es un carrier* de S , entonces

$$\sum_S \phi_i(v) = v(S)$$

S2. Para cada permutación π^{**} , e $i \in N$,

$$\phi_{\pi(i)}[\pi v] = \phi_i[v]$$

S2. Si u y v son dos juegos cualesquiera,

$$\phi_i[u + v] = \phi_i[u] + \phi_i[v]$$

Entonces el valor de Shapley se obtiene por medio de esta fórmula:

$$\phi_i(v) = \sum_{\{S \in N: i \in S\}} \frac{(S-1)!(n-S)!}{n!} (v(S) - v(S - \{i\})) \quad (3.1.2.12)$$

⁸ (OWEN, 1995), Op. Cit. p.262

* Un carrier de un juego v es una coalición T que satisface que para cualquier S , $v(S) = v(S \cap T)$. (Ver Def. XII.1.1 en: OWEN, p.261)

** Sea v un juego de n personas y sea π cualquier permutación del conjunto N . Entonces, por πv nos referimos a un juego u , definido para cualquier $S = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$, se satisface que $u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), \dots, \pi(i_s)\}) = v(S)$ (Ver Def. XII.1.2 en: OWEN, p.261)

Aparte de su formulación axiomática, el valor de Shapley tal como se ha definido en la ecuación 3.1.2.12, se puede explicar de manera heurística⁹:

Suponga que los jugadores (elementos de N) se han puesto de acuerdo para reunirse en un punto del tiempo y el espacio específico. Naturalmente, por las fluctuaciones aleatorias, ellos aparecerán en diferentes momentos, sin embargo, la probabilidad de llegada, asumiendo todos los órdenes de llegada, para cada uno de los jugadores termina siendo la misma, $1/n!$. Los términos que vienen después de la sumatoria corresponden a las posibles combinaciones hechas por el número de jugadores correspondientes a cada coalición y el número de posibles coaliciones que no incluyen al jugador i . Suponga entonces que, si un jugador i llega y se encuentra con los agentes de la coalición $S - \{i\}$, entonces él recibe un valor $V(S) - V(S - \{i\})$, el valor marginal que contribuye el jugador i a la coalición S . Entonces el valor de Shapley $\phi_i(v)$ será el valor esperado del jugador i bajo este esquema de llegadas aleatorias.

3.1.2.4. Formación de Coaliciones

Dependiendo de los diferentes conceptos de solución, se han propuesto varias maneras de formar coaliciones debido a que el problema combinatorio puede llegar a ser bastante complejo cuando están participando muchos agentes. Sabemos que existen $2^n - 1$ posibles coaliciones, siendo n el número de agentes participando. Si n es un número muy grande, el problema es exponencialmente complejo. Son varios los algoritmos que se han propuesto por varios autores con el fin de hacer de este proceso de formación, un proceso menos complejo.

Entre las diferentes teorías de formación de coaliciones, la Teoría de Excesos Equivalentes (Komorita, 1970) se ha utilizado en varias aplicaciones, tal como la asignación de trabajos. Esta teoría trata sobre la división del pago de las diferentes coaliciones luego de obtener el excedente de este. Empieza teniendo un valor de pago esperado por cada agente, el cual es una partición equivalente de ganancias. En cada ronda, el valor esperado de cada agente se va actualizando por el valor del excedente restante después de que cada agente recibe su pago esperado. Este valor esperado es conocido como $E^r(i, S)$ y cada ronda $r = (0, 1, \dots)$ es el r estado discreto en el proceso

⁹ (OWEN, 1995), p.265

de negociación. Después de muchas rondas, la teoría predice el valor esperado de cada agente igual a su mejor coalición, lo cual significa que el valor del exceso converge o se torna negativo. Para cada jugador i y la coalición S , el valor esperado más alto está dado por la siguiente ecuación.

$$A^r(i, S) = \max_{T \ni S} [E^r(i, T)] \quad (3.1.2.13)$$

Para actualizar el valor esperado en cada ronda $r+1$, cada jugador reclama su valor esperado previo y el resto es dividido entre partes iguales. Esto se puede observar en la siguiente ecuación:

$$E^r(i, S) = A^r(i, S) + \left[v(S) - \sum_{j \in S} A^r(j, S) \right] / s \quad (3.1.2.14)$$

Goradia y Vidal en (GORADIA & VIDAL, 2007) presentan un algoritmo que llaman *PACT Algorithm* (Progresivo, para cualquier uso, convergente y eficiente en tiempo de ejecución), el cual es capaz de resolver problemas reales de programación de trabajos en los que intervienen múltiples agentes sin tener que recurrir a un optimizador central. Para este tipo de casos, se presenta una configuración coalicional óptima y una distribución de pagos estable. La solución que logran implementar, el *core relajado*, es una variación del *core* y demuestran, experimentalmente, que el algoritmo es eficiente al compararlo con la solución óptima. En la figura 1 se muestra el algoritmo PACT desarrollado.

```

FIND-COALITION-PACT( $i$ )
1   $t \leftarrow 0$ 
2   $L_i \leftarrow \{c \in T : i \in c^{agents}\}$ 
3   $N^{agents} \leftarrow \bigcup_{c \in L_i} c^{agents}$ 
4  for  $c \in L_i$ 
5      do  $E^t(i, c) \leftarrow \frac{c^{value}}{|c^{agents}|}$ 
6       $fixed(c) \leftarrow FALSE$ 
7   $t \leftarrow t + 1$ 
8  for  $c \in L_i$ 
9      do  $A^t(i, c) \leftarrow \max_{c' \in L_i - c} E^t(i, c')$ 
10     for  $j \in c^{agents}$ 
11         do send  $A^t(i, c)$ ; receive  $A^t(j, c)$ 
12     if  $fixed(c) = FALSE$ 
13         then  $E^t(i, c) \leftarrow A^t(i, c) + \frac{c^{value} - \sum_{j \in c^{agents}} A^t(j, c)}{|c^{agents}|}$ 
14         if  $(E^t(i, c) \text{ has converged}) \vee (E^t(i, c) \leq 0)$ 
15             then  $fixed(c) \leftarrow TRUE$ 
16 if  $\exists c \in L_i : fixed(c) = FALSE$ 
17     then goto 7
18  $c_i^* \leftarrow \operatorname{argmax}_{c \in L_i} E^t(i, c)$ 
19 for  $j \in A$ 
20     do send  $c_i^*$ ; receive  $c_j^*$ ; put all into  $C_{preferred}^*$  set
21  $c^* \leftarrow \{c_x \in C_{preferred}^* : \forall x \neq y, c_x^{value} > c_y^{value}\}$ 
22 if  $i \in c^{agents}$ 
23     then return  $c^*$ 
24  $C_{preferred}^* \leftarrow C_{preferred}^* - c^*$ 
25 for  $j \in c^{agents}$ 
26     do  $L_i \leftarrow L_i - \{c \in L_i : j \in c\}$ 
27 if not empty?  $L_i$ 
28     then goto 18
29 return

```

Figura 1: Algoritmo PACT

Un algoritmo orientado a la solución tipo Kernel fue desarrollado por Shehory y Klush [1996], con muchas aplicaciones a problemas en el que participan múltiples agentes y cada quien es un decisor racional e independiente. Los pasos de este algoritmo son los siguientes:

1. Calcular e intercambiar las ofertas de posibles coaliciones
2. Formación de coaliciones
3. Asignación de los pagos y reglas de terminación

Para otros conceptos de solución como lo es el Valor de Shapley, cuyo cálculo es algo complejo, se han implementado algunos algoritmos de formación de coaliciones. Shehory y Kraus en (SHEHORY & KRAUS) sugieren dos tipos de algoritmos para la formación de las coaliciones y la distribución de los vectores de pago, en uno de ellos, utilizando el Valor de Shapley como solución del juego. Cada uno de estos algoritmos se adapta a distintos entornos y aplicaciones que buscan la cooperación entre múltiples agentes. El primer algoritmo presentado es el de negociación, el cual empieza formando coaliciones vía negociación entre agentes, empezando por las coaliciones de un solo agente y terminando en la gran coalición. En cada uno de los pasos, la negociación entre agentes

se hace con base en el pago extra que queda luego de que posiblemente se haya unido a la coalición. Uno o más agentes pueden estar ofreciendo para entrar a una coalición en común. Básicamente se queda en ella quien ofrezca una mejor oferta. Para mantener un orden en la negociación se establece una relación de fortaleza entre coaliciones, con el fin de determinar quien ofrece primero. El segundo algoritmo es uno diseñado para el cálculo del Valor de Shapley en el que se asigna un agente externo que haga el cálculo, mientras que el resto de agentes se van formando desde las coaliciones de un solo jugador hasta la gran coalición. Primero, el agente externo pide toda la información relevante y luego se hace la computación de las 2^n posibles coaliciones. Para cada una de las posibles coaliciones, el agente externo debe calcular el pago correspondiente, el cual se determina por una función de maximización de variables. Una vez obtenido el Valor de Shapley para cada agente, los contacta nuevamente para informarle de los resultados.

Como el cálculo del Valor de Shapley involucra la formación de todas las posibles coaliciones, y por tanto, una complejidad combinatoria en su cálculo, no se puede reducir su complejidad, a menos de que se defina otro tipo de solución. Para ello, en la literatura, se ha definido el Valor Bilateral de Shapley (BSV), el cual, se ha utilizado en varias aplicaciones reales como una alternativa a la solución del Valor de Shapley, involucrando la negociación bilateral entre múltiples agentes racionales. Sea N el conjunto de jugadores. Se definen las coaliciones C_i y C_j , las coaliciones fundadoras de la coalición bilateral de C , siendo $C \subseteq N$. Estas cumplen con la propiedad de que $C_i \cap C_j = C$ y $C_i \cup C_j = \emptyset$. Entonces, se define el Valor Bilateral Shapley de la coalición C_i en la coalición bilateral C como lo representa la ecuación 3.1.2.15.

$$\varphi_C(C_i) = \frac{1}{2}v(C_i) + \frac{1}{2}(v(C) - v(C_j)) \quad (3.1.2.15)$$

Tanto la coalición C_i como la C_j están dispuestos a formar la coalición C si se cumplen las siguientes condiciones expresadas en la ecuación 3.1.2.16.

$$v(C_i) \leq \varphi_C(C_i) \quad \wedge \quad v(C_j) \leq \varphi_C(C_j) \quad (3.1.2.16)$$

El proceso de formación de coaliciones es básicamente el implementado por Shehory y Klusch, mencionado anteriormente.

3.1.2.5. Algunos ejemplos de juegos coalicionales

En esta sección se presentarán algunas clases de juegos coalicionales, los cuales se han utilizado como modelos en muchas aplicaciones.

*Juego de Mercados*¹⁰

Sea N el conjunto de jugadores. Un mercado está representado por una cuádrupla $(S, \mathbb{R}_+^m, A, W)$, para la cual S representa la coalición, es decir, un conjunto de comercializadores, \mathbb{R}_+^m es el espacio Euclidean m -dimensional en donde se encuentran la cantidad de bienes, $A = (a^i)_{i \in N}$ es la colección indexada de puntos en \mathbb{R}_+^m , que representan la cantidad invertida inicialmente y $W = (w^i)_{i \in N}$ es una colección indexada de funciones cóncavas y continuas en \mathbb{R}_+^m , las cuales representan las funciones de utilidad. Asumimos que los mercados permiten transferencia de utilidades, es decir, que existe dinero o bienes adicionales y que cada comercializador pueda medir su utilidad (por la venta de sus bienes) en términos de dinero. Entonces, la utilidad del comercializador $i \in N$ para $x \in \mathbb{R}_+^m$ y la cantidad $\xi \in \mathbb{R}_+^m$ de dinero es $W^i(x, \xi) = w^i(x) + \xi$. Sea, entonces, $(S, \mathbb{R}_+^m, A, W)$ un mercado y sea $\emptyset \neq S \subseteq N$. Un mercado conformado por los miembros de S es una colección indexada $(x^i, \xi^i)_{i \in S}$ tal que $x^i \in \mathbb{R}_+^m$ para todo $i \in S$, $\sum_{i \in S} x^i = \sum_{i \in S} a^i$ y $\sum_{i \in S} \xi^i = 0$. La utilidad total de la coalición S como resultado de la transacción mencionada es $\sum_{i \in S} W^i(x^i, \xi^i) = \sum_{i \in S} w^i(x^i) + \sum_{i \in S} \xi^i = \sum_{i \in S} w^i(x^i)$. Teniendo todas las posibles combinaciones de coaliciones S , $x_S = (x^i)_{i \in S}$ y denotando a X^S como conjunto de todas las coaliciones factibles, se llega a la definición formulada por Shapley y Shubik (1969) con respecto a los juegos de mercados:

Un juego (N, v) es juego de mercados si existe un mercado $(S, \mathbb{R}_+^m, A, W)$, tal que

$$v(S) = \max\{\sum_{i \in S} w^i(x^i) \mid x_S \in X^S\} \text{ para cada } S \subseteq N. \quad (3.1.2.17)$$

*Juego de Asignación*¹¹

¹⁰ (PELEG & SUDHÖLTER, 2007), p.13

Sea $N = M \cup M'$, en donde M y M' son conjuntos disyuntos con m elementos cada uno, sea $M = \{1, 2, \dots, m\}$ y $M' = \{m+1, m+2, \dots, 2m\}$. El jugador $i \in M$ (vendedor i -ésimo), posee una propiedad, la cual valora en a_i dólares. El jugador $m+j \in M'$ (comprador j -ésimo) desea comprar una propiedad en b_{ij} dólares. Por lo tanto, una coalición entre los jugadores $i \in M$ y $m+j \in M'$ puede obtener una utilidad,

$$v(\{i, m+j\}) = c_{ij} = \begin{cases} b_{ij} - a_i, & \text{si } b_{ij} \geq a_i \\ 0 & \text{si } b_{ij} \leq a_i \end{cases} \quad (3.1. 2.18)$$

Tenemos también que para cualquier $S \subset M$ o $S \subset M'$, tenemos que $v(S) = 0$. Para todos los demás casos, el valor del juego es igual al máximo de la utilidad total generada por la venta de las propiedades entre los miembros de S , sujeto a las restricciones de asignación, que ningún vendedor puede venderle a más de un comprador y el comprador no puede adquirir una propiedad de más de un vendedor. Entonces, si S no tiene más vendedores que compradores, se asigna el comprador $m+j(i)$ al vendedor i y su utilidad total es:

$$\sum_{i \in S \cap M} c_{ij(i)} \quad (3.1. 2.19)$$

Así que el valor del juego la máxima utilidad sobre todas las posibles asignaciones:

$$v(S) = \max \sum_{i \in S \cap M} c_{ij(i)} \quad (3.1. 2.20)$$

Para el caso en el que no hay más compradores que vendedores, se tiene que el valor del juego es:

$$v(S) = \max \sum_{m+j \in S \cap M'} c_{i(j)j} \quad (3.1. 2.21)$$

Para un conjunto N , en particular, se tiene que el valor del juego es el máximo entre todas las permutaciones $(j(1), j(2), \dots, j(m))$ del conjunto M utilizando la matriz de permutaciones p_{ij} (la matriz contiene valores de 0 y 1):

$$v(N) = \max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{ij} c_{ij} \quad (3.1. 2.22)$$

Se puede considerar el problema de programación lineal de asignación (cambiando la p_{ij} por la q_{ij}) y sujeto a las restricciones que corresponden a las mismas del juego desarrollado. El programa

¹¹ (OWEN, 1995) p.221

tiene una solución factible $Q = (q_{ij})$, la cual podría compararse con la misma matriz de permutaciones, siendo que la primera un matriz puede tomar valores entre 0 y 1. Sin embargo, se puede comprobar que la solución óptima está en sus puntos extremos¹² y este es, efectivamente, la matriz de permutaciones, p_{ij} . Por lo tanto, si se obtiene el dual del programa de asignación,

$$\min\{\sum_{j=1}^m y_j + \sum_{i=1}^m z_i\} \quad (3.1. 2.23)$$

Sujeto a

$$y_i + z_i \geq c_{ij} \quad i, j = 1, \dots, m \quad (3.1. 2.23.1)$$

Se puede observar que el vector óptimo a minimizar no es único, por lo tanto decimos que, teniendo el vector a minimizar $(y'_i; z'_i)$, se obtiene, que, por dualidad,

$$\sum_{i=1}^m y'_i + \sum_{i=1}^m z'_i = v(N) \quad (3.1. 2.24)$$

Por lo tanto, se podría decir que $(y'; z')$ son imputaciones del juego N . En (OWEN, 1995) se demuestra que, para cualquier S , $(y'; z') \in C(v)$, es decir, el *core* del juego.

*Juego de Producción*¹³

Se tiene un conjunto de jugadores $N = \{1, 2, \dots, n\}$, cada jugador posee un lote de q bienes. Más específicamente, el jugador i posee b_{i1} unidades del bien C_1 , b_{i2} unidades de C_2 , ..., b_{iq} unidades del C_q . Los bienes no tienen valor por si solos, excepto que sean utilizados para producir los bienes G_1, \dots, G_m , el cual puede ser vendido a unos precios fijados en el mercado. Asumimos una producción lineal del proceso, en el que una unidad de G_l requiere de a_{l1} unidades de C_1 , a_{l2} unidades de C_2 , ..., y a_{lq} unidades de C_q , que pueden ser vendidos en p_l dólares. Cuando una coalición S se forma, los miembros van a contribuir con cada uno de sus bienes con el fin de maximizar las ganancias por la venta de los productos en el mercado. Por lo tanto, la función característica está dada por la siguiente formulación lineal:

¹² Ver Lema 5.8.1 (p.132) en (KARLIN, 1987)

¹³ (OWEN, 1995), p.231

$$v(S) = \max \sum_{l=1}^m p_l x_l \quad (3.1. 2.25)$$

Sujeto a

$$\sum_{l=1}^m a_{kl} x_l \leq b_k(S), \quad k = 1, 2, \dots, q \quad \text{en donde } b_k(S) = \sum_{i \in S} b_{ik} \quad (3.1. 2.25.1)$$

$$x_l \geq 0, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

Para cada coalición $S_j \in S$ haga $x^j = (x_1^j, \dots, x_m^j)$ el vector a optimizar definiendo S_j en el modelo anteriormente expuesto. Para un vector balanceado definido dentro del concepto de solución del core, (y_1, y_2, \dots, y_r) se comprueba en (OWEN, 1995) que el problema no tiene un *core* vacío. Para hallar una solución en específico, se sugiere resolver el problema dual de programación lineal.

Juegos del Árbol de Expansión de Costo Mínimo¹⁴

Un grupo de N consumidores, distribuidos geográficamente, deben ser conectados a un proveedor 0. Estos consumidores pueden ser, por ejemplo, ciudades y el proveedor, una planta de energía eléctrica. El usuario puede ser conectado vía el proveedor directo o por medio de otros usuarios. Haga que $N_* = N \cup \{0\}$ y considere un grafo completo no-dirigido cuyo conjunto de nodos es de N_* . El costo de conectar $i, j \in N_*, i \neq j$, por una esquina $e_{i,j}$ es $c_{i,j}$.

Sea $S \subseteq N$. Un árbol de expansión de costo mínimo, $\Gamma_S = (S \cup \{0\}, E_S)$, es un árbol con un conjunto de nodos $S \cup \{0\}$ y un conjunto de esquinas E_S , que conectan los miembros de S a un proveedor común 0, tal que el costo total de todas las conexiones es mínima. La función de costo c del juego de costo (N, c) está definida por la siguiente función:

$$c(S) = \sum_{e_{ij} \in E_S} c_{ij} \quad \text{para todo } S \subseteq N \quad (c(\emptyset) = 0). \quad (3.1. 2.26)$$

3.1.3. Modelos Clásicos de Oferta

¹⁴ (PELEG & SUDHÖLTER, 2007), p.15

Una de las primeras aplicaciones de la teoría de juegos fue en la economía. Su aplicación llevo al surgimiento de varios modelos que, hoy en día, son considerados indispensables para este campo. Muchos de estos modelos económicos son utilizados por muchas industrias para al análisis de la oferta y demanda de sus productos en el mercado. Incluso, se pueden clasificar algunas industrias dentro de estos modelos y los precios de los productos o servicios que ofrecen dependen del tipo de modelo que se ajusta su mercado. Esto se debe a que el mercado hace que se crean mecanismos de oferta y demanda que genera competencia entre todas las empresas participantes. La competencia está clasificada en dos: competencia perfecta y competencia imperfecta.

La competencia perfecta es definida como un mercado en el que existen un gran número de competidores, tanto vendedores como compradores y no existe la manera en el que uno solo ejerza influencia sobre los otros para poder elevar o disminuir los precios en el mercado. En este modelo el precio es definido a partir de la intersección de las curvas de oferta y demanda, el punto de equilibrio, el cual determina el precio de equilibrio. A este precio, las empresas deciden libremente que cantidad ofrecer. No es posible que se eleven los precios, solo se pueden minimizar los costos para obtener mayores utilidades y aprovechar al máximo sus recursos.

La competencia imperfecta surge cuando en un mercado existen unas o varias empresas que tienen el poder para influir sobre los precios de las otras dada sus ventajas económicas y comerciales. Cuando es un grupo reducido de empresas las que influyen, conocemos este modelo como oligopolio y cuando es una sola empresa, monopolio. Los oligopolios en el mercado de productos homogéneos son tradicionalmente analizados por la teoría de juegos por medio de tres modelos conocidos como el modelo de Cournot, el modelo de Bertrand y el modelo de Stackelberg.

3.1.3.1. Modelo de Cournot

En este modelo cada empresa decide el nivel de producción de manera simultánea de acuerdo a la maximización de sus utilidades, sin perder de vista que el precio depende la producción total de todas las empresas en conjunto. Todas las empresas supondrán que sus competidores

mantendrán su producción constante y entonces, conociendo la cantidad de cada una de las empresas, se puede fijar una cantidad maximizadora de utilidades. El equilibrio de Cournot se consigue cuando cada empresa asume correctamente la producción de sus oponentes y elige el nivel de producción que maximice sus propios beneficios. En el caso de un duopolio. Se tiene que los niveles de producción de dos productores sean q_1 y q_2 . Entonces, la curva de demanda está dada por:

$$P = a - b(Q) = a - b(q_1 + q_2) \quad (3.1.3.1)$$

Asumiendo también que el costo marginal es constante e igual a c , el beneficio de cada empresa se da por la siguiente ecuación:

$$\pi(q_1, q_2) = (P - c)q_1 = (a - bq_1 - bq_2 - c)q_1 \quad (3.1.3.2)$$

Entonces se obtiene la utilidad marginal del primer productor,

$$\frac{\partial \pi(q_1, q_2)}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow a - bq_1 - bq_2 - c = 0 \quad (3.1.3.3)$$

Resolviendo,

$$q_1 = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_2 \equiv q_1^*(q_2) \quad (3.1.3.4)$$

De la misma manera se obtiene,

$$q_2 = \frac{a - c}{2b} - \frac{1}{2}q_1 \equiv q_2^*(q_1) \quad (3.1.3.5)$$

Aunque el modelo de Cournot sea estático, el equilibrio derivado se puede interpretar como el resultado de un proceso de ajuste. Si se supone que la empresa 1 en cada periodo impar escoge la cantidad a continuación,

$$q_1^t = q_1^*(q_2^{t-1}) \quad (3.1.3.6)$$

La anterior es la reacción óptima con relación a la cantidad producida por el competidor en el periodo anterior. Suponiendo que ocurre lo mismo en los periodos pares, con la empresa 2, las cantidades convergen al equilibrio del Nash-Cournot no importa cual haya sido el punto de partida.

Para un oligopolio de más de 2 empresas, se tiene que la cantidad ofrecida por un productor depende de la producción de las demás empresas de esta forma:

$$q_1^*(q_2, \dots, q_n) = \frac{a-b}{2b} - \frac{1}{2}(q_2 + \dots + q_n) \quad (3.1.3.7)$$

Resolviendo el sistema para obtener una solución simétrica ($q_i = q^N$) se obtiene:

$$q^N = \frac{a-c}{b(n+1)} \quad (3.1.3.8)$$

$$Q^N = \frac{n}{n+1} \frac{a-c}{b} \quad (3.1.3.9)$$

$$P^N = \frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}c \quad (3.1.3.10)$$

A medida que aumentan el número de empresas, el precio de equilibrio se aproxima al precio de competencia perfecta.

3.1.3.2. Modelo de Bertrand

Este modelo asume la misma hipótesis del modelo de Cournot, sin embargo, la cantidad es sustituida por el precio como variable estratégica. En el caso de un duopolio, dos empresas fijan precios que maximizan sus utilidades, pero estos pueden estar sujetos a alguna de las siguientes situaciones:

$p_1 > p_2$: La demanda de la empresa 1 sería 0, suponiendo que la empresa 2 satisface toda la demanda.

$p_1 = p_2$: La demanda se dividiría entre ambas empresas equitativamente.

$p_1 < p_2$: Toda la demanda la tiene la empresa 1

Sin embargo, en el momento de fijar los precios la empresa 1 debe tener en cuenta si el precio de la empresa 2 es inferior al coste marginal, c ; superior al precio monopolístico del mercado, P^M ; o entre ambos valores. Para ello, se tienen diferentes valores óptimos, representado por la siguiente función:

$$p_1^*(p_2) = \begin{cases} P^M & \text{si } p_2 > P^M : \\ p_2 - \varepsilon & \text{si } c \leq p_2 \leq P^M \end{cases} \quad \text{Suponiendo que } \varepsilon \text{ es un valor muy pequeño.} \quad (3.1.3.11)$$

$$c \quad \text{si } p_2 < c$$

Suponiendo que la empresa 2 está en las mismas condiciones que la empresa 1, su solución sería simétrica. El equilibrio de Nash sería la intersección de ambas funciones de reacción, es decir, $p_1^*(p_2) = p_2^*(p_1) = c$. En otras palabras, su equilibrio es igual a su coste marginal. Asimismo, como en el modelo de Cournot, a medida que aumenta el número de empresas, la convergencia de los valores a los de competencia perfecta se logra rápidamente.

3.1.3.3. Modelo de Stackelberg

Considere un problema de dos etapas, en el que en la primera etapa, una primera decisión es tomada por el primer jugador o líder del juego. De acuerdo a esta decisión, el segundo jugador, el seguidor, optimiza su solución, la cual es denominada $x_2^*(x_1)$, de la siguiente manera:

$$x_2^*(x_1) = \frac{\partial \pi_2(x_2, x_1)}{\partial x_2} = 0 \quad (3.1.3.11)$$

Durante la segunda etapa del juego, el primer jugador anticipa la respuesta del segundo, encontrando la solución para x_1 :

$$\frac{d\pi_1(x_1, x_2^*(x_1))}{dx_1} = \frac{\partial \pi_1(x_1, x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial \pi_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \frac{\partial x_2^*}{\partial x_1} = 0 \quad (3.1.3.12)$$

3.2 ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO DEL VALOR DE SHAPLEY¹⁵

3.2.1 El potencial de Hart y Mas-Colell

Hart y Mas-Colell introducen una función potencial, la cual le asigna a cada juego (N, v) un número real $P(N, v)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$P(\emptyset, v) = 0 \quad (3.2.1.1)$$

$$(3.2.1.2)$$

¹⁵ Tomado de (FERNANDEZ GARCIA, 2000) p.43-47

$$\sum_{i \in N} D^i P(N, v)$$

$$D^i P(N, v) = P(N, v) - P(N \setminus i, v_{N \setminus i}) \quad (3.2.1.3)$$

Donde $v_{N \setminus i}$ es la función característica v a las coaliciones $S \in 2^{N \setminus i}$, tal que $v_{N \setminus i}(S) = v(S)$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus i$. El número real $D^i P(N, v)$ se denomina contribución marginal del jugador i al juego (N, v) . Se exige, para cumplir con la condición de eficiencia,

$$P(N, v) = \frac{1}{|S|} [v(S) + \sum_{i \in S} P(S \setminus i, v)] \text{ Para cada } S \subseteq N, S \neq \emptyset. \quad (3.2.1.4)$$

Este valor puede ser calculado por medio de un algoritmo recursivo. Hart y Mas-Colell demuestran que la contribución marginal del juego (N, v) coincide con su valor de Shapley, esto es,

$$D^i P(N, v) = P(N, v) - P(N \setminus i, v_{N \setminus i}) = \varphi_i(N, v) \text{ Para todo } i \in N. \quad (3.2.1.5)$$

Algoritmo Potencial (N, v)

$P(\emptyset, v) \leftarrow 0$

Para $i = 1$ hasta n

Para $j = 1$ hasta $\binom{n}{i}$

$$P(S_i^j, v) \leftarrow \frac{1}{|S_i^j|} \left[v(S_i^j) + \sum_{k \in S_i^j} P(S_i^j \setminus k, v) \right]$$

Fin Para

Fin Para

Donde S_i^j es la j -ésima coalición de tamaño i , $|S_i^j| = i$.

3.2.2 Dividendos de Harsanyi

Aunque la complejidad temporal de este algoritmo es de $O(3^n)$, su eficiencia mejora notablemente en situaciones en las que existe cooperación parcial. En un espacio vectorial

Γ^n , cualquier juego puede expresarse como una combinación lineal de ellos, resultando que $v = \sum_{\{T \subseteq N; T \neq \emptyset\}} \Delta_v(T) u_T$ con $\Delta_v(T) = \sum_{H \subseteq T} (-1)^{|T|-|H|} v(H)$

Harsanyi denomina $\Delta_v(T)$ el dividendo de T en el juego v , cumpliéndose,

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T), \text{ Para } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \text{ y } \Delta_v(\emptyset) = 0 \quad (3.2.2.1)$$

Por lo tanto, comenzando con $\Delta_v(\emptyset) = 0$, el valor $v(S)$ se puede calcular recursivamente por medio de la siguiente fórmula,

$$\Delta_v(S) = v(S) - \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T) \quad (3.2.2.2)$$

El valor de Shapley, $\varphi_i(v)$, para cada $i \in N$, es

$$\varphi_i(v) = \sum_{\{S \subseteq N; i \in S\}} \frac{\Delta_v(S)}{|S|} \quad (3.2.2.3)$$

Algoritmo Dividendo (N, v)

$\Delta_v(\emptyset) \leftarrow 0$

Para $i = 1$ hasta n

Para $j = 1$ hasta $\binom{n}{i}$

$$\Delta_v(S_i^j) \leftarrow v(S_i^j) - \sum_{T \subseteq S_i^j} \Delta_v(T)$$

Fin Para

Fin Para

Donde S_i^j es la j -ésima coalición de tamaño i , $|S_i^j| = i$.

3.3. ESTRUCTURA DEL MERCADO ELÉCTRICO COLOMBIANO

El mercado eléctrico colombiano está compuesto por varias entidades, públicas y privadas, cuyas actividades pertenecen a toda una cadena productiva de la energía eléctrica, la cual comienza desde los generadores y termina en los usuarios, receptores finales de la energía generada.

3.2.1. Aspectos Institucionales

En Colombia, el gobierno se encarga de la dirección, planeación, regulación y control del mercado eléctrico. La dirección del mercado eléctrico está a cargo del Ministerio de Minas y Energía, el cual ha establecido decretos y leyes que han estructurado el sector eléctrico colombiano¹⁶. De acuerdo con los artículos 365-370, el modelo del sector eléctrico adoptado por Colombia se fundamenta en los principios establecidos en la carta constitucional. Con la expedición de las Leyes 142 y 143 de 1994 se reestructuró el Sector Eléctrico Colombiano y se establecieron límites a la integración vertical con la determinación de cuatro actividades: generación, transmisión, distribución y comercialización, se creó el Mercado Mayorista de Electricidad y se reorganizó el esquema institucional del sector. La planeación del mercado eléctrico está a cargo de la Unidad de Planeación Minero Energética (UPME), la cual es organizada por el Ministerio de Minas y Energía como una unidad especial que se encarga de elaborar y actualizar el Plan de Expansión de Referencia del sector energético. La regulación del mercado eléctrico está a cargo de la Comisión de Regulación de Energía y Gas (CREG), la cual debe velar por un servicio adecuado por medio del aprovechamiento de los recursos escasos en beneficio de los usuarios. El control y la vigilancia del mercado eléctrico están a cargo de la Superintendencia de Servicios Públicos (SSPD), la cual, independientemente de la comisión de regulación, esta se encarga de realizar funciones específicas de control y vigilancia.

3.2.2. Actividades del Sector Eléctrico

En el Mercado de Energía Mayorista (MEM) participan aquellas entidades que generan, transmiten, distribuyen, comercializan y consumen la energía. La generación de la energía es la producción de la energía eléctrica mediante una planta conectada al Sistema de Interconectado Nacional (SIN). La comercialización es la transacción de compra y venta de energía eléctrica a los usuarios finales, por medio de contratos bilaterales o por medio de la bolsa. La transmisión es el transporte de la energía eléctrica a través de un conjunto de líneas que operan a tensiones iguales o superiores de 220kW, o pertenecen a un sistema de transmisión regional. La distribución es el transporte de la energía eléctrica a través de un conjunto de líneas que operan a tensiones

¹⁶ (MINISTERIO DE MINAS Y ENERGIA, 2007)

inferiores de 220kW, que se dedican al servicio de transmisión municipal, distrital o local. Una entidad puede ser generadora, distribuidora/transmisora y comercializadora al mismo tiempo. Por último, los consumidores de la energía son los usuarios regulados y no regulados. Los usuarios regulados son aquellos que consumen cantidades menores a 55MWh/mes y están sujetos a contratos de condiciones uniformes y tarifas regidas por la CREG. Los usuarios no regulados, por el contrario, son aquellos que consumen cantidades mayores a 55MWh/mes y están sujetos a contratos bilaterales, cuyos precios de venta y cantidades son libres y acordados entre ambas partes.

3.2.3. Transacciones a través del MEM

En el mercado eléctrico colombiano existen diversos entes que manejan la operación de transacción a través del MEM. El Centro Nacional de Despacho se encarga de toda la planeación, supervisión y control de las actividades de generación, interconexión y transmisión del SIN (Sistema Interconectado Nacional). Igualmente asegura que el despacho de energía se dé de la manera más eficiente y confiable, y sobre todo, siguiendo los reglamentos acordados en el reglamento de operación. Los contratos de energía a largo plazo y el registro de las fronteras comerciales lo hace el Administrador del Sistema de Intercambios Comerciales. Las actividades de liquidación, facturación, cobro y pago de los actos o contratos de energía transados en la Bolsa por generadores y comercializadores, en fin, todo lo necesario para garantizar el buen funcionamiento del Sistema de Intercambios Comerciales (SIC). En la administración del MEM se encuentra igualmente el liquidador y administrador de cuentas del Sistema de Trasmisión Nacional, el cual se encarga de liquidar y facturar los cargos de uso de las redes del Sistema de Interconectado Nacional asignadas.

Básicamente las transacciones en el MEM entre generadores y comercializadores se realizan por medio de dos maneras: contratos financieros fijados a largo plazo (Resolución CREG 47 de 2000) y por medio de la Bolsa de la Energía (Resolución CREG 55 de 1999). En la primera, los precios y cantidades son fijados libremente entre compradores y vendedores. En la segunda, los generadores participantes en el MEM deben ofrecer sus ofertas de precio en la Bolsa de la Energía, los cuales deben tener en cuenta sus costos variables y el riesgo involucrado. La compra

de energía que gestionan los comercializadores para fines de los usuarios regulados se realiza por medio de contratos bilaterales, los cuales han sido regulados y en el que se garantiza la competencia en este tipo de transacciones (Resolución CREG 20 de 1996). Por otro lado, la compra de energía destinada hacia los usuarios no regulados, también establecida con contratos bilaterales, no están reguladas y los precios pueden ser acordados libremente entre ambas partes.

3.3. ESTADO DEL ARTE

Son varias las aplicaciones que se han visto en torno a las cadenas de suministro desde el punto de vista de la teoría de juegos cooperativa. Por un lado, en el sector eléctrico se han analizado los mercados eléctricos, los problemas de transmisión de la energía eléctrica, la planeación de las plantas generadoras de energía eléctrica. Por otro lado, se ha visto como en otras industrias se han observado modelos similares.

Gately en (GATELY, 1974) fue uno de los primeros autores en abordar el tema de cooperación para el sistema de energía eléctrico entre varias regiones. Su aplicación fue específicamente con referencia al suministro de la energía eléctrica en cuatro estados de los Estados Unidos. Se propone la repartición del beneficio de varias empresas de generación de electricidad en estos distintos estados, el cálculo de los costos para cada uno de los grados de cooperación y la medida de eficiencia en la cooperación. Los diferentes grados de cooperación que define el autor son: (1) Cooperación completa entre todos los Estados, (2) autosuficiencia para cada Estado y (3) cooperación entre algunos, pero no todos los Estados. Para simplificar el problema, se consideraron sólo tres áreas geográficas, para las cuales se validaron las diferentes propiedades de estabilidad y eficiencia en las coaliciones.

Autores como Javier Contreras, se han dedicado a la planeación de las líneas de transmisión energéticas y varias aplicaciones que se han hecho en torno a ello. Se han diseñado algoritmos para un sistema distribuido de múltiples agentes, cada uno con la oportunidad de cooperar dentro de la cadena de suministro. En (CONTRERAS J. , 1997) se diseña un sistema de información inteligente de optimización para redes de transmisión energética en California, Estados Unidos. Para un ejemplo de 6 líneas de transmisión se definen los agentes que participan en el juego. Este

juego es restringido dado que no todas las coaliciones son factibles. Utilizan el valor de Shapley como concepto de solución. Para ello, utilizan un algoritmo de negociación calculando el Valor Bilateral de Shapley, mencionado en las pasadas secciones, con el fin de evitar la complejidad exponencial que implica el cálculo del Valor de Shapley. En esta investigación, se muestran los resultados de la implementación de este algoritmo al problema clásico de transmisión de energía eléctrica. En (CONTRERAS & WU, A Kernel-Oriented Algorithm for Transmission Planning, 2000) se obtiene otro tipo de concepto de solución, la Kernel, para el mismo problema de transmisión de energía eléctrica. En cuanto a otros casos, se ha observado aplicaciones en torno a la calidad de la energía. En (HULSHORST & WOLSE, 2007) se implementan contratos de calidad con el fin de lograr acuerdos entre el usuario y el generador. En la medida en que el usuario pague por obtener mejor calidad mediante contratos, es posible coordinar un suministro más eficiente de la energía. A medida de que un operador pueda establecer los límites acordados con el cliente y a medida de que existan los límites de regulación en la calidad de la energía, se podrán evitar problemas de calidad, tanto para el cliente como para el generador.

Igualmente, se han visto innumerables aplicaciones en el mercado eléctrico, especialmente áreas de la teoría de juegos no necesariamente cooperativos. En (CONTRERAS, KLUSCH, & KRAWCZYK, Numerical Solutions to Nash-Cournot Equilibria in Coupled Constraint Electricity Markets, 2004) se presenta un método numérico basado en el algoritmo relajado y la función Nikaido-Isoda presentada para el cálculo de equilibrio de Nash-Cournot en el mercado energético. Se obtuvo resultados para un sistema de 30 líneas de transmisión, para el cual, se observaron las elasticidades en cuanto al precios en oferta y cómo la cooperación varía en cada caso. En (VELASQUEZ, 2000) se observan las funciones matemáticas de equilibrio para los mercados energéticos y la aplicación de esto en el sector energético para el mercado energético desregulado. Son muchas las aplicaciones en el sector eléctrico y energético, presentadas por Velásquez en su informe, para las cuales no entraremos en detalle, pero están enfocadas hacia los mercados oligopólicos, y para ello, obteniendo el equilibrio de Cournot de manera dinámica y estática.

En (LINDROOS, 2000) se aplica la teoría de juegos cooperativa en la industria de la pescadería de los países nórdicos en Europa. Para ello, se define un juego cooperativo en el que participan tres

agentes. La solución del juego se concentra en el núcleo y en el Valor de Shapley. Lindroos demuestra que la cooperación entre todas las naciones, es decir, la gran coalición, no es estable. Además, los nuevos miembros potenciales de las pescaderías regionales no tienen incentivos para unirse. Sin embargo, resultados de flotas ineficientes marcan resultados contrarios.

Cachón y otros autores han abordado la optimización y cooperación de la cadena de suministros. De manera general se han visto las diferentes aplicaciones en torno a la cadena de suministros y las muchas variantes de ese problema. En (CACHÓN, 1999) se observa una cadena de suministro de dos niveles que contemplan las ventas perdidas y la demanda estocástica. Por medio de la generación de contratos, se observa como los incentivos hacen que las empresas decidan sobre una acción o sobre otra. También se determina la manera como el costo es compartido entre los diferentes miembros de la cadena. En (CACHON & ZIPKIN, 1999) se observan las distintas políticas de inventarios implementadas a partir de los esquemas cooperativos y competitivos. En (CACHON & LARIVIERE, 2005) se analizan los pros y los contras de los contratos de repartición de ingresos y se demuestra con un solo almacén, como se llega a la solución óptima y también se observa como esta funciona para un conjunto de almacenes que están compitiendo por cantidades a comprar.

4. DISEÑO METODOLÓGICO

4.1. TIPO DE ESTUDIO

Para el diseño del modelo cooperativo de la cadena de suministro de la energía eléctrica fue necesario hacer un estudio de: (1) la teoría de juegos cooperativa, sus diferentes conceptos de solución, las teorías de formación de coaliciones existentes en la literatura y en especial, los algoritmos que existen en la actualidad para el cálculo del Valor de Shapley; (2) la estructura del sector eléctrico colombiano, el comportamiento del mercado y de sus entes regulatorios; y (3) el estado del arte de las aplicaciones de la teoría de juegos en la optimización de las cadenas de suministro de la energía.

Luego de hacer la exploración de la literatura existente en los temas anteriormente expuestos, se procede a determinar el tipo de juego cooperativo que se aplica a la cadena de suministros de la energía eléctrica en Colombia. Se analizan las distintas variables que intervienen dentro del modelo de optimización y se procede a diseñar el modelo de juego cooperativo adecuado para el problema descrito. Por último se implementa el modelo en un caso particular del sector eléctrico en la industria colombiana.

4.2. METODOLOGÍA

Esta investigación ha concentrado su enfoque en la teoría de juegos cooperativa y su aplicación a una cadena de suministro en particular, la del sector eléctrico colombiano. Por lo tanto, se ha hecho primero un análisis sobre el estado del arte en este tema. Particularmente, no se ha observado aplicaciones de teoría de juegos cooperativa en el sector eléctrico colombiano. Si se han observado funciones matemáticas de equilibrio y en estas se incluye el equilibrio cooperativo, sin embargo, no se han visto modelo de formación de coaliciones ni el cálculo del Valor de Shapley para un problema de cadena de suministro de la energía eléctrica. Por ser un tema novedoso fue necesario observar todas las distintas aplicaciones que se han hecho, no sólo en el sector eléctrico, sino también en otros sectores de la industria. Se estudian igualmente los modelos de teoría de

juegos cooperativa y los diferentes conceptos de solución, los algoritmos de formación de coaliciones y algoritmos para el cálculo del Valor de Shapley, en particular.

Para el diseño del modelo se han observado que en el mercado eléctrico no regulado intervienen los generadores, comercializadores y usuarios no regulados, principalmente. Se ha decidido formular un modelo económico de oferta de la energía eléctrica, teniendo en cuenta que cada uno de los generadores y comercializadores buscan maximizar sus utilidades. Si se optimiza todas las funciones al mismo tiempo, no se hallaría una solución eficiente al modelo. Por lo tanto, y siguiendo el trabajo presentado por Luceny Guzman en (GUZMAN, 2007), se obtiene una solución inicial por medio de la optimización bi-nivel y con base en esa respuesta inicial, se busca la cooperación de los distintos comercializadores, quienes van a ser los que intervienen directamente con el cliente.

Con el fin de validar el modelo presentado, se utilizará herramientas computacionales tales como Visual Studio como apoyo a Microsoft Office y se resolverá para el caso presentado y se comparará con los resultados de optimización individuales optimizadas por medio de de GAMS.

4.3. HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

Para la presente investigación se analizan los posibles resultados esperados:

1. La cooperación entre comercializadores es eficiente y estable dentro del modelo de optimización de la energía eléctrica en Colombia, en el que todos los agentes forman una coalición (gran coalición) y no tienen incentivos para salirse de la misma.
2. La cooperación entre comercializadores no es eficiente ni estable dentro del modelo de optimización de la energía eléctrica en Colombia.
3. La cooperación entre comercializadores es parcialmente eficiente y estable dentro del modelo de optimización de la energía eléctrica en Colombia, pero no todos los agentes logran formarse en una gran coalición dado su inestabilidad e ineficiencia.

4.4. FUENTES DE INFORMACIÓN

Para esta investigación se pretende dar un aporte tanto académico (diseño del modelo) como informático (validación del modelo). La investigación hecha para el diseño del modelo se obtiene de fuentes tanto primarias como secundarias. Como fuente primaria se investigó en artículos de bases de datos electrónicas y páginas web con el fin de obtener el estado del arte más reciente; por otro lado, libros de teoría de juegos, en especial, autores que se especializan en teoría de juegos cooperativa, como lo son OWEN, PELEG y SUDHÖLTER, AUBIN, SHAPLEY, entre otros. Como fuente secundaria, los buscadores de páginas web como www.google.com y las bases de datos electrónicas y la biblioteca de la Universidad del Norte fueron de gran apoyo.

5. MODELO DE OFERTA DE LA ENERGÍA

5.1. FORMULACIÓN DEL MODELO

5.1.1. Definición del modelo matemático del la cadena de suministros de la energía

Se define un juego dinámico de múltiples participantes, por un lado están los generadores, cada uno denominado agente i , y por el otro están los comercializadores, cada uno denominado agente j . Se plantea el principio de Stackelberg y se recurre a una optimización bi-nivel con el fin de optimizar las funciones de utilidad de ambos agentes. Este modelo fue formulado por L. Guzmán, el cual utiliza Kuhn-Tucker como procedimiento de solución, el cual será utilizado en la primera parte del modelo para obtener la cantidad x_{ij}^* que cada comercializador j recibe de cada generador i . El modelo de optimización referenciado en (GUZMAN, 2007, pág. 33) es el siguiente:

$$\max \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \quad (5.1.1)$$

Sujeto a

$$\nabla_l f_i(x) - \sum_{i=1}^m w_i \nabla_l g_i(x) - \sum_{j=1}^n w_{m+j} \nabla g_{m+j}(x) - \sum_{k=1}^r w_{m+n+k} \nabla_l g_{m+n+k}(x) = 0 \quad (5.1.1.1)$$

$$w_i g_i(x) = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (5.1.1.2)$$

$$w_{m+j} g_{m+j}(x) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.1.1.3)$$

$$w_{m+n+k} g_{m+n+k}(x) = 0 \quad k = 1, \dots, r \quad (5.1.1.4)$$

$$w_{m+n+k+j} g_{m+n+k+j}(x) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.1.1.5)$$

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (5.1.1.6)$$

$$g_{m+j}(x) \leq 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (5.1.1.7)$$

$$g_{m+n+k}(x) \leq 0 \quad k = 1, \dots, r \quad (5.1.1.8)$$

$$g_{m+n+k+j}(x) \leq 0 \quad (5.1.1.9)$$

$$w_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, m + 2n + r \quad (5.1.1.10)$$

Donde ∇_i es el gradiente con respecto a x_i de las variables controladas por el subnivel i

Luego con estos resultados, se inicia un juego cooperativo de n -jugadores, siendo n el número de comercializadores en el modelo, que buscan maximizar sus utilidades y suplir la demanda de los usuarios no regulados. Para ello, se debe definir cuanta cantidad venderle a cada cliente en cada periodo, dependiendo de la demanda pronosticada para cada uno. Debido a que se busca beneficiar a los comercializadores en conjunto, se proceden a formar coaliciones entre ellos para obtener la mejor manera de comercializar la energía para satisfacer la demanda de los usuarios no regulados. La figura 1 muestra una representación gráfica del modelo.

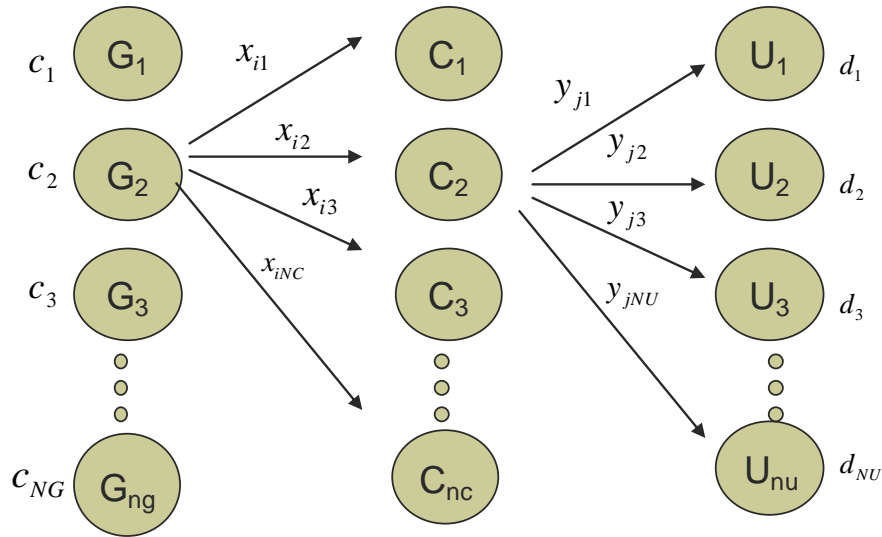


Figura 2: Representación grafica del modelo propuesto.

5.1.2. Definición del juego cooperativo entre comercializadores

Sea $B = \{B_1, B_2, \dots, B_r\}$ el conjunto de todas las posibles estructuras coalicionales formadas por n jugadores, en este caso, los nc comercializadores en la cadena de suministros de la energía. Sea $B_i \in B$ una coalición formada por m subcoaliciones. El juego cooperativo de los comercializadores de energía consiste, entonces, en la compra y venta de la energía en beneficio de sus utilidades. Cada comercializador j le compra x_{ij} unidades (kWh) de energía al generador i y luego le vende y_{jk} unidades (kWh) de energía al usuario k , tal como se muestra en la Figura 2.

Asumiendo la posible cooperación entre comercializadores y además, que al unirse, los precios que ambos han ofrecido se convierte en un precio que maximice sus utilidades, se asigna, para cada coalición B_l , una función característica del juego que asigna el valor a cada una de las m subcoaliciones es definida bajo el siguiente modelo de programación lineal:

$$\max \sum_{w=1}^m \left[\sum_{k=1}^{nu} p_{wk} y_{kw} - \sum_{j \in B_w^l} \sum_{i=1}^{ng} c_{ij} x_{ij} \right] \quad (5.1.2)$$

Sujeto a

$$x_{ij} = x_{ij}^* \quad \forall i, j \quad (5.1.2.1)$$

$$\sum_{j \in B_w^l} \sum_{i=1}^{ng} x_{ij} = \sum_{k=1}^{nu} y_{kw} \quad \forall w \quad (5.1.2.2)$$

$$\sum_{w=1}^m y_{wk} = d_k \quad \forall k \quad (5.1.2.3)$$

$$x_{ij}, y_{jk} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (5.1.2.4)$$

En la ecuación 5.1.2, c_{ij} es el precio que cada generador i le vende al comercializador j por kWh de energía, mientras que p_{wk} es el precio establecido entre los j comercializadores, en las m coaliciones de la estructura coalicional B^l . La ecuación 5.1.2.1 establece las cantidades x_{ij}^* que cada generador i le vende a cada comercializador j , el cual se obtiene de la primera optimización hecha por programación bi-nivel. La ecuación 5.1.2.2. establece que la cantidad total suministrada por los generadores a los comercializadores pertenecientes a una coalición w , debe ser igual a la cantidad total suministrada de cada coalición a los usuarios no regulados. La ecuación 5.1.2.3 establece que los comercializadores deben proveer la energía demandada por cada k usuario no regulado. La ecuación 5.1.2.4 establece la no negatividad para las variables del problema de optimización.

5.2. PROCEDIMIENTO PARA SOLUCIONAR EL MODELO MATEMÁTICO PROPUESTO

5.2.1. Solución matemática al modelo

Como cualquier juego cooperativo, nos interesa, no sólo que la coalición sea estable y eficiente, sino que también la distribución de pagos sea equitativa entre los jugadores que pertenecen a dicha coalición.

Observando el modelo matemático, específicamente en la ecuación 5.1.2.1, en donde $x_{ij} = x_{ij}^* \forall i, j$, entonces la segunda parte de la sumatoria en la función objetivo observada en la ecuación 5.1.2 es un valor constante, es decir,

$$\sum_{j \in B_w^l} \sum_{i=1}^{ng} c_{ij} x_{ij} = \sum_{j \in B_w^l} \sum_{i=1}^{ng} c_{ij} x_{ij}^*$$

Teniendo en cuenta esto, el modelo se puede reducir a:

$$\max \sum_{w=1}^m \left[\sum_{k=1}^{nu} p_{wk} y_{kw} - \sum_{j \in B_w^l} \sum_{i=1}^{ng} c_{ij} x_{ij}^* \right] \quad (5.2.1.1)$$

Sujeto a

$$\sum_{k=1}^{nu} y_{wk} = \sum_{j \in B_w^l} \sum_{i=1}^{ng} x_{ij}^* \quad \forall w \quad (5.2.1.2)$$

$$\sum_{w=1}^m y_{wk} = d_k \quad \forall k \quad (5.2.1.3)$$

$$y_{jk} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (5.2.1.4)$$

Para el modelo matemático anterior se tiene que la matriz a optimizar es la presentada en la ecuación 5.2.1.5:

$$y_k^l = (y_{1k}^l, y_{2k}^l, \dots, y_{mk}^l) \quad (5.2.1.5)$$

Si definimos una matriz f_j^w que representa la fracción que le corresponde a cada comercializador j dentro de cada subcoalición w , se tiene que el core consiste en los vectores $(f_1^w, f_2^w, \dots, f_{nc}^w)$ para cada una de las subcoaliciones formadas B_w dentro de la coalición B . Para pertenecer al core, esta solución deben cumplir con los principios de eficiencia y racionalidad individual:

$$\sum_{j \in B_w} f_j^w \geq v(B_w) \quad \forall w \quad (5.2.1.6)$$

$$\sum_{j=1}^{nu} f_j^w = v(N) \text{ para } w = 1 \quad (5.2.1.7)$$

Para este problema de optimización primal se le puede obtener el dual, el cual se plantea en las siguientes ecuaciones:

$$\min \sum_{w=1}^m \left[\left(\sum_{j \in B_w} \sum_{i=1}^{ng} x_{ij}^* \right) \cdot a_w \right] + \sum_{k=1}^{nu} d_k b_k \quad (5.2.1.8)$$

Sujeto a:

$$a_w + b_k \geq p_{wk} \quad \forall w, k \quad (5.2.1.9)$$

Para este problema tenemos que el vector de minimización es $(a_w^*; b_k^*)$, los cuales se pueden asociar con las imputaciones del juego cooperativo. Como,

$$v(B_w) = \sum_{k=1}^{nu} p_{wk} y_{wk} - \sum_{j \in B_w} \sum_{i=1}^{ng} c_{ij} x_{ij}^* \quad \forall w \quad (5.2.1.10)$$

Igualmente, al saber por el modelo de programación original que $x_{ij}^* \geq 0$, se puede obtener por dualidad que,

$$\sum_{k=1}^{nu} y_{wk} (a_w^* + b_k^*) \geq \sum_{k=1}^{nu} p_{wk} y_{wk} \quad (5.2.1.11)$$

Entonces,

$$\sum_{k=1}^{nu} y_{wk} (a_w^* + b_k^*) \geq v(B_w) \quad \forall w \quad (5.2.1.12)$$

También, teniendo en cuenta que se forma la gran coalición, tenemos que,

$$v(N) = \sum_{w=1}^m \left[\sum_{k=1}^{nu} p_{wk} y_{wk} - \sum_{j \in B_w} \sum_{i=1}^{ng} c_{ij} x_{ij}^* \right] \quad (5.2.1.13)$$

Si definimos que lo que le corresponde a cada jugador en la gran coalición es:

$$(5.2.1.14)$$

$$f_j = \sum_{k=1}^{nu} y_{wk} (a_w^* + b_k^*)$$

Entonces,

$$\sum_{j \in B_w} f_j \geq v(B_w) \quad y \quad \sum_{j=1}^{nc} f_j = v(N) \quad (5.2.1.15)$$

De esta manera, se cumplen las propiedades de eficiencia y racionalidad individual de las coaliciones. Por lo tanto, los vectores $(f_1^w, f_2^w, \dots, f_{nc}^w)$ sí pertenecen al *core* del juego.

Sin embargo, hemos observado en la literatura que el Valor de Shapley cumple con todas las axiomas para garantizar la estabilidad de las coaliciones generadas y garantiza una única solución aunque su valor sea un poco complicado de calcular. Para ello, también observamos que en la literatura se muestran varios algoritmos que simplifican el cálculo del Valor de Shapley, resumidos en las pasadas secciones.

5.2.2. Algoritmo Stackelberg-Cooperativo

El procedimiento implementado para solucionar el modelo de optimización de la cadena de suministros de la energía eléctrica se denomina el modelo Stackelberg-Cooperativo. Este procedimiento tiene en cuenta la optimización bi-nivel presentada anteriormente y, luego, la coalición entre comercializadores. A continuación se presenta el algoritmo desarrollado para este modelo:

ALGORITMO STACKELBERG-COOPERATIVO

```
0  Ng ← input    // numero de generadores
   Nc ← input    // numero de comercializadores
   Nu ← input    // numero de usuarios no regulados
   v_g(i, j), v_c(j, k), cap_g(i), dem(k) i=1,...,Ng; j=1,..., Nc; k= 1,...,Un
   r ← 0; stop ← falso
1  PASO 1: Optimización Bi-Nivel de la cadena de suministros
2  PASO 2: Formación de los coaliciones iniciales
3  PASO 3: Assignación de costos y precios de las coaliciones
4  PASO 4: Optimización de la función característica del juego para la coalición r
5  PASO 5: Registrar el valor del juego para cada agente
6  Haga
7  PASO 6: La subcoalición ganadora es seleccionada
   // La contribución para cada jugador se registra cuando la nueva coalición es formada.
   // Con estos valores, la coalición mas fuerte es seleccionada y el valor es registrado.
8    Para w=1 Hasta (count-1)
9      PASO 7: Formación de nuevas coaliciones
10     Ir al PASO 3
11     Ir al PASO 4
12     Ir al PASO 5
13   Fin Para
14   PASO 8: Una mejor solución es registrada
15   Si V(Sr) < V_max entonces
16     Si |Lj| < 0 ent
17       l ← j ∉ Lj
18     Si no
19       stop ← verdadero
20   Fin Si
21   // Lj es el conj. de agentes que han sido líderes en las rondas anteriores.
22   Fin Si
23 Hasta stop= verdadero
24 PASO 10: Calcular el Valor de Shapley
25 Imprimir resultados
```

La extensión de este algoritmo se encuentra en el APÉNDICE A.

5.2.3. Implementación del algoritmo

Para verificación del algoritmo, se hizo una implementación del mismo en Visual Studio 2005 y el uso de Microsoft Excel 2003 como medio para ingresar los datos iniciales, mostrar los resultados y utilizar algunas de sus herramientas de cálculo. Como se puede observar en el algoritmo, se pide inicialmente el número de generadores, comercializadores y usuarios y los datos de precios, demanda y capacidad las cuales son almacenadas en matrices y vectores. Debido a que este problema es combinatorio, la manera como se registran las coaliciones nuevas es por medio de una cadena de caracteres la cual registra el valor de la posición en la que está el comercializador

que ordena de 1 hasta n en la cadena, es decir, si tenemos 1_1_2_3, quiere decir que nuestra coalición es $\{(1,2) (3) (4)\}$. Aunque esta forma parezca complicada, ahorra mucho más espacio en la memoria. Sin embargo, al desarrollar cualquier tipo de cálculo, es necesario convertirlo a matriz binaria para que sea solo multiplicar matrices en la operación. Para realizar las optimizaciones se hace uso de la herramienta de Solver en Excel y luego de haber calculado el Valor de Shapley, el algoritmo presenta la estructura coalicional que mejor le conviene a los comercializadores y en las coaliciones con más de un agente se presenta el pago que a cada uno le correspondería cooperando.

5.2.4. Cálculo de la complejidad del algoritmo

Para calcular la complejidad del algoritmo es necesario primero saber los ciclos que están ocurriendo, a nivel general. Se pueden observar, en primera instancia, un ciclo *Haga Hasta* que llega hasta que se cumpla una condición de parada, en el peor de los casos, hasta $2^{nc} - 1$ y un *Para anidado*, el cual puede llegar, en el peor de los casos hasta $nc - 1$ (la variable *count* puede cambiar de iteración tras iteración). Las optimizaciones, aunque utilicemos Solver de Excel, es necesario recalcar que el algoritmo simplex llega al óptimo sin necesidad de tomar la herramienta de Excel. Se demostró en (PAPADIMITRIOU & STEIGLITZ, 1998) que en el peor de los casos, el algoritmo simplex tomaría $2^d - 1$ iteraciones, sabiendo que tenemos $3d$ variables y $2d$ restricciones¹⁷, siendo $d = (nu + nc)/2$. Al calcular el Valor de Shapley estamos utilizando una plantilla de Shapley, para el cual tienen dos ciclos PARA, cada uno de los ciclos llega, como mucho, al número total de comercializadores, es decir, nc y además, se tienen que recorrer todas las posibles coaliciones, lo cual, para este caso, son 2^{nc} , obteniendo así una complejidad de $O((nc)^2 2^{nc})$.

5.3. EJEMPLO NUMÉRICO: MERCADO ELÉCTRICO COLOMBIANO

En la Industria Eléctrica Colombiana, la negociación de la energía está manejada por el Mercado Mayorista de la Energía (MEM), en donde los generadores y comercializadores participan como

¹⁷ (PAPADIMITRIOU & STEIGLITZ, 1998), Ver Th. 8.1 p.169

agentes del Sistema de Interconectado Nacional (SIN) y negocian la energía por medio de contratos a corto y a largo plazo. Este caso en particular se trata de la negociación de energía a largo plazo, en el que contratos bilaterales son realizados entre cada una de las partes interesadas. Un conjunto de plantas generadoras están interesadas en participar en esta negociación. Estas empresas les suministran energía a cuatro grandes empresas colombianas, conocidas como usuarios no regulados del sistema. Sin embargo, esta negociación es realizada por medio de seis compañías comercializadoras, por medio de acuerdos comerciales hechos con los generadores y con los usuarios no regulados. Este ejemplo numérico es resuelto con el modelo propuesto. En la tabla 1, las capacidades de los cinco diferentes generadores están dadas. En la tabla 2, se muestran los precios por kWh de energía vendida de generadores a comercializadores y en la tabla 3, los precios por kWh de energía vendida entre comercializadores y usuarios no regulados. Finalmente, la demanda pronosticada para los usuarios no regulados se encuentra en la tabla 4.

	Capacidades (Kwh)
G1	302
G2	411
G3	447
G4	314
G5	877

Tabla 1. Capacidades (kWh) para los generadores

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
G1	94,8	102	93,6	87	93,6	93,6
G2	93,6	91,2	97,8	88,8	94,2	91,2
G3	87,6	94,8	90	87,6	95,4	97,8
G4	94,8	97,2	97,2	103,8	96,6	88,8
G5	95,4	93,6	89,4	90	96,6	94,2

Tabla 2. Precios (\$/kWh) por energía vendida entre generadores y comercializadores.

	U1	U2	U3	U4
C1	158	170	156	145
C2	156	152	163	148
C3	146	158	150	146
C4	158	162	162	173
C5	159	156	149	150
C6	156	157	159	161

Tabla 3. Precios (\$/kWh) de energía vendida entre comercializadores y usuarios no regulados.

	Demanda (Kwh)
U1	250
U2	315
U3	325
U4	200

Tabla 4. Demanda pronosticada de los usuarios no regulados.

Se procede a utilizar el algoritmo Stackelberg-Cooperativo con el fin de demostrar que, si los agentes cooperan, se garantiza una estabilidad en la coalición.

5.4. RESULTADOS COMPUTACIONALES

Se procede a ingresar los datos en el programa generado por Visual Studio 2005. Los informes generados en Microsoft Excel nos muestran las diferentes coaliciones formadas con sus valores optimizados. En el APÉNDICE B se presenta el informe generado. En la tabla 5 se muestra, en resumen, los valores correspondientes a las diferentes coaliciones generadas.

Subconjunto	Vmax	Subconjunto	Vmax	Subconjunto	Vmax
{1}	9128,18944	{1,2,3}	30807,7672	{1,2,3,5}	36040,7473
{2}	12845,4977	{1,2,4}	59472,3054	{1,2,3,6}	37233,874
{3}	6538,15379	{1,2,5}	29672,9812	{1,2,4,5}	66124,7741
{4}	35164,8531	{1,2,6}	29956,5451	{1,2,4,6}	66150,8919
{5}	5338,65962	{1,3,4}	52467,7098	{1,2,5,6}	35915,6
{6}	5926,59183	{1,3,5}	22580,056	{1,3,4,5}	59892,2395
{1,2}	23627,7316	{1,3,6}	23059,883	{1,3,4,6}	59037,1734
{1,3}	17474,9143	{1,4,5}	51077,5855	{1,3,5,6}	29061,8317
{1,4}	44660,0342	{1,4,6}	51251,4823	{1,4,5,6}	57711,7146
{1,5}	15715,9095	{1,5,6}	21634,7228	{2,3,4,5}	-
{1,6}	15721,0692	{2,3,4}	56713,1378	{2,3,4,6}	62823,0522
{2,3}	19965,5595	{2,3,5}	25675,61	{2,3,5,6}	32501,158
{2,4}	49116,8662	{2,3,6}	26785,3577	{2,4,5,6}	61536,8358
{2,5}	18479,6213	{2,4,5}	55306,9142	{3,4,5,6}	55135,8446
{2,6}	19378,8677	{2,4,6}	55392,0962	{1,2,3,4,5}	73652,8182
{3,4}	42395,5766	{2,5,6}	25158,3837	{1,2,3,4,6}	74029,2452
{3,5}	11981,3505	{3,4,5}	48653,3526	{1,2,3,5,6}	43075,1272
{3,6}	13028,1611	{3,4,6}	49275,6128	{1,2,4,5,6}	72717,3912
{4,5}	41204,475	{3,5,6}	18789,2945	{1,3,4,5,6}	65653,3286
{4,6}	41426,3475	{4,5,6}	47481,2809	{2,3,4,5,6}	68691,3997
{5,6}	11623,1761	{1,2,3,4}	67386,9627	{1,2,3,4,5,6}	80591,342

Tabla 5. Valores optimizados por subconjunto generado.

Para el cálculo de Shapley se utilizan estos valores y se procede a utilizar la plantilla presentada en la figura 3.

VALOR DE SHAPLEY

$$\phi_i(v) = \sum_{S \in \mathcal{N}_{i \in S}} \frac{(S-1)!(n-S)!}{n!} (v(S) - v(S - \{i\}))$$

Jugador i en cada coalición	Contribución a la coalición que contienen j jugadores						$\phi_i(v)$
	1	2	3	4	5	6	
1	$V(1)-V(\emptyset)$	$(V(1,2)-V(2)) + (V(1,3)-V(3)) + (V(1,4)-V(4)) + (V(1,5)-V(5)) + (V(1,6)-V(6))$	$(V(1,2,3)-V(2,3)) + (V(1,2,4)-V(2,4)) + (V(1,2,5)-V(2,5)) + (V(1,2,6)-V(2,6)) + (V(1,3,4)-V(3,4)) + (V(1,3,5)-V(3,5)) + (V(1,3,6)-V(3,6)) + (V(1,4,5)-V(4,5)) + (V(1,4,6)-V(4,6)) + (V(1,5,6)-V(5,6))$	$(V(1,2,3,4)-V(2,3,4)) + (V(1,2,3,5)-V(2,3,5)) + (V(1,2,3,6)-V(2,3,6)) + (V(1,2,4,5)-V(2,4,5)) + (V(1,2,4,6)-V(2,4,6)) + (V(1,2,5,6)-V(2,5,6)) + (V(1,3,4,5)-V(3,4,5)) + (V(1,3,4,6)-V(3,4,6)) + (V(1,3,5,6)-V(3,5,6)) + (V(1,4,5,6)-V(4,5,6))$	$(V(1,2,3,4,5)-V(2,3,4,5)) + (V(1,2,3,4,6)-V(2,3,4,6)) + (V(1,2,3,5,6)-V(2,3,5,6)) + (V(1,2,4,5,6)-V(2,4,5,6)) + (V(1,3,4,5,6)-V(3,4,5,6))$	$V(1,2,3,4,5,6)-V(2,3,4,5,6)$	0
2	$V(2)-V(\emptyset)$	$(V(1,2)-V(1)) + (V(2,3)-V(3)) + (V(2,4)-V(4)) + (V(2,5)-V(5)) + (V(2,6)-V(6))$	$(V(1,2,3)-V(1,3)) + (V(1,2,4)-V(1,4)) + (V(1,2,5)-V(1,5)) + (V(1,2,6)-V(1,6)) + (V(2,3,4)-V(3,4)) + (V(2,3,5)-V(3,5)) + (V(2,3,6)-V(3,6)) + (V(2,4,5)-V(4,5)) + (V(2,4,6)-V(4,6)) + (V(2,5,6)-V(5,6))$	$(V(1,2,3,4)-V(1,3,4)) + (V(1,2,3,5)-V(1,3,5)) + (V(1,2,3,6)-V(1,3,6)) + (V(1,2,4,5)-V(1,4,5)) + (V(1,2,4,6)-V(1,4,6)) + (V(1,2,5,6)-V(1,5,6)) + (V(2,3,4,5)-V(3,4,5)) + (V(2,3,4,6)-V(3,4,6)) + (V(2,3,5,6)-V(3,5,6)) + (V(2,4,5,6)-V(4,5,6))$	$(V(1,2,3,4,5)-V(1,3,4,5)) + (V(1,2,3,4,6)-V(1,3,4,6)) + (V(1,2,3,5,6)-V(1,3,5,6)) + (V(1,2,4,5,6)-V(1,4,5,6)) + (V(2,3,4,5,6)-V(2,3,4,5,6))$	$V(1,2,3,4,5,6)-V(1,3,4,5,6)$	0
3	$V(3)-V(\emptyset)$	$(V(1,3)-V(1)) + (V(2,3)-V(2)) + (V(3,4)-V(4)) + (V(3,5)-V(5)) + (V(3,6)-V(6))$	$(V(1,2,3)-V(1,2)) + (V(1,3,4)-V(1,4)) + (V(1,3,5)-V(1,5)) + (V(1,3,6)-V(1,6)) + (V(2,3,4)-V(2,4)) + (V(2,3,5)-V(2,5)) + (V(2,3,6)-V(2,6)) + (V(3,4,5)-V(4,5)) + (V(3,4,6)-V(4,6)) + (V(3,5,6)-V(5,6))$	$(V(1,2,3,4)-V(1,2,4)) + (V(1,2,3,5)-V(1,2,5)) + (V(1,2,3,6)-V(1,2,6)) + (V(1,3,4,5)-V(1,4,5)) + (V(1,3,4,6)-V(1,4,6)) + (V(1,3,5,6)-V(1,5,6)) + (V(2,3,4,5)-V(2,4,5)) + (V(2,3,4,6)-V(2,4,6)) + (V(2,3,5,6)-V(2,5,6)) + (V(2,4,5,6)-V(4,5,6))$	$(V(1,2,3,4,5)-V(1,2,4,5)) + (V(1,2,3,4,6)-V(1,2,4,6)) + (V(1,2,3,5,6)-V(1,3,5,6)) + (V(1,3,4,5,6)-V(1,4,5,6)) + (V(2,3,4,5,6)-V(2,3,4,5,6))$	$V(1,2,3,4,5,6)-V(1,2,4,5,6)$	0
4	$V(4)-V(\emptyset)$	$(V(1,4)-V(1)) + (V(2,4)-V(2)) + (V(3,4)-V(3)) + (V(4,5)-V(5)) + (V(4,6)-V(6))$	$(V(1,2,4)-V(1,2)) + (V(1,3,4)-V(1,3)) + (V(1,4,5)-V(1,5)) + (V(1,4,6)-V(1,6)) + (V(2,3,4)-V(2,3)) + (V(2,4,5)-V(2,5)) + (V(2,4,6)-V(2,6)) + (V(3,4,5)-V(3,5)) + (V(3,4,6)-V(3,6)) + (V(4,5,6)-V(5,6))$	$(V(1,2,3,4)-V(1,2,3)) + (V(1,2,4,5)-V(1,2,5)) + (V(1,2,4,6)-V(1,2,6)) + (V(1,3,4,5)-V(1,3,5)) + (V(1,3,4,6)-V(1,3,6)) + (V(1,4,5,6)-V(1,5,6)) + (V(2,3,4,5)-V(2,3,5)) + (V(2,3,4,6)-V(2,3,6)) + (V(2,4,5,6)-V(2,5,6)) + (V(3,4,5,6)-V(3,5,6))$	$(V(1,2,3,4,5)-V(1,2,3,5)) + (V(1,2,3,4,6)-V(1,2,3,6)) + (V(1,2,4,5,6)-V(1,2,4,5,6)) + (V(1,3,4,5,6)-V(1,3,4,5,6)) + (V(2,3,4,5,6)-V(2,3,4,5,6))$	$V(1,2,3,4,5,6)-V(1,2,3,5,6)$	0
5	$V(5)-V(\emptyset)$	$(V(1,5)-V(1)) + (V(2,5)-V(2)) + (V(3,5)-V(3)) + (V(4,5)-V(4)) + (V(5,6)-V(6))$	$(V(1,2,5)-V(1,2)) + (V(1,3,5)-V(1,3)) + (V(1,4,5)-V(1,4)) + (V(1,5,6)-V(1,6)) + (V(2,3,5)-V(2,3)) + (V(2,4,5)-V(2,4)) + (V(2,5,6)-V(2,6)) + (V(3,4,5)-V(3,4)) + (V(3,5,6)-V(3,6)) + (V(4,5,6)-V(4,6))$	$(V(1,2,3,5)-V(1,2,3)) + (V(1,2,4,5)-V(1,2,4)) + (V(1,2,5,6)-V(1,2,6)) + (V(1,3,4,5)-V(1,3,4)) + (V(1,3,5,6)-V(1,3,6)) + (V(1,4,5,6)-V(1,4,6)) + (V(2,3,4,5)-V(2,3,4)) + (V(2,3,5,6)-V(2,3,6)) + (V(2,4,5,6)-V(2,4,6)) + (V(3,4,5,6)-V(3,4,6))$	$(V(1,2,3,4,5)-V(1,2,3,4)) + (V(1,2,3,5,6)-V(1,2,3,5,6)) + (V(1,2,4,5,6)-V(1,2,4,5,6)) + (V(1,3,4,5,6)-V(1,3,4,5,6)) + (V(2,3,4,5,6)-V(2,3,4,5,6))$	$V(1,2,3,4,5,6)-V(1,2,3,4,6)$	0
6	$V(6)-V(\emptyset)$	$(V(1,6)-V(1)) + (V(2,6)-V(2)) + (V(3,6)-V(3)) + (V(4,6)-V(4)) + (V(5,6)-V(5))$	$(V(1,2,6)-V(1,2)) + (V(1,3,6)-V(1,3)) + (V(1,4,6)-V(1,4)) + (V(1,5,6)-V(1,5)) + (V(2,3,6)-V(2,3)) + (V(2,4,6)-V(2,4)) + (V(2,5,6)-V(2,5)) + (V(3,4,6)-V(3,4)) + (V(3,5,6)-V(3,5)) + (V(4,5,6)-V(4,5))$	$(V(1,2,3,6)-V(1,2,3)) + (V(1,2,4,6)-V(1,2,4)) + (V(1,2,5,6)-V(1,2,5)) + (V(1,3,4,6)-V(1,3,4)) + (V(1,3,5,6)-V(1,3,5)) + (V(1,4,5,6)-V(1,4,5)) + (V(2,3,4,6)-V(2,3,4)) + (V(2,3,5,6)-V(2,3,5)) + (V(2,4,5,6)-V(2,4,5)) + (V(3,4,5,6)-V(3,4,5))$	$(V(1,2,3,4,6)-V(1,2,3,4)) + (V(1,2,3,5,6)-V(1,2,3,5)) + (V(1,2,4,5,6)-V(1,2,4,5)) + (V(1,3,4,5,6)-V(1,3,4,5)) + (V(2,3,4,5,6)-V(2,3,4,5))$	$V(1,2,3,4,5,6)-V(1,2,3,4,5)$	0
P(j)	0,166666667	0,033333333	0,016666667	0,016666667	0,033333333	0,166666667	
$\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$							

Figura 3. Plantilla de Shapley

Cabe resaltar que esta plantilla está adaptada para este ejemplo en particular, sin embargo, el diseño de la herramienta computacional permite considerar coaliciones para n jugadores.

De acuerdo con los resultados, se obtiene que la gran coalición sea la mejor alternativa para este problema, es decir, la coalición $\{1,2,3,4,5,6\}$. Las cantidades optimizadas se presentan en la tabla 6.

	U1	U2	U3	U4
C1	0	315	0	0
C2	0	0	325	0
C3	0	0	0	0
C4	0	0	0	200
C5	250	0	0	0
C6	0	0	0	0

Tabla 6. Cantidades (en kWh) que debe negociar cada comercializador con cada usuario.

En resumen, si todos los comercializadores cooperan, podrían aumentar sus ganancias, obteniendo así la utilidad total de \$80,591. Al calcular el Valor de Shapley, a cada comercializador i le corresponde φ_i en utilidades, la cual se presenta en la tabla 7.

Jugador i en cada coalición	Contribución a la coalición que contienen j jugadores						$\varphi(v)$
	1	2	3	4	5	6	
1	9.128,19	51.385,90	103.381,04	105.324,77	117.131,02	11.899,94	12.600,35
2	12.845,50	68.472,20	133.359,38	79.442,92	71.327,18	14.938,01	12.837,27
3	6.538,15	36.441,77	73.853,68	12.708,59	37.662,10	7.873,95	6.314,85
4	35.164,85	179.026,21	360.095,12	301.678,89	183.990,97	37.516,21	35.243,65
5	5.338,66	29.401,25	59.235,05	-1.261,15	31.158,11	6.562,10	4.968,34
6	5.926,59	32.162,27	64.162,62	64.680,56	94.721,77	6.938,52	8.521,04
P(j)	0,17	0,03	0,02	0,02	0,03	0,17	

Tabla 7. Valores de Shapley calculados para este problema.

Teóricamente, al sumar los valores se debería obtener la misma cifra que se obtiene en la gran coalición. Sin embargo, se presenta una desviación de 0,13 % debido a errores de aproximación del modelo de repartición de utilidades de Shapley.

Al comparar los valores con los obtenidos en (GUZMAN, 2007), se puede observar la conveniencia de cooperar y la estabilidad de la coalición generada, ya que los jugadores no tienen ningún incentivo para salirse de la coalición. En la tabla 8 se muestra dicha comparación.

COMS	OPTIMIZACION BI-NIVEL	COOPERACIÓN
1	8640.33	12600,34946
2	12509.86	12837,26927

3	6235.09	6314,851023
4	33951.26	35243,65068
5	4869.00	4968,336351
6	6128.03	8521,040108

Tabla 8. Comparación de las utilidades generadas por el modelo.

6. CONCLUSIONES Y FUTURAS INVESTIGACIONES

La coordinación de la cadena de suministros de la Energía, es bajo muchos enfoques distintos, la mejor manera de resolver los problemas de optimización debido a que existen muchas partes interesadas de la cadena y cada uno busca su propio beneficio, por lo que sus funciones de optimización son conflictivas. Si se buscara la cooperación entre agentes, y estos mismos fueran coordinados por un sistema centralizado que le distribuya sus beneficios de la mejor manera, se puede mejorar el beneficio global del sistema y controlar un mejor servicio de compra y venta de energía.

El mercado eléctrico colombiano presenta una situación en el que cada una de las diferentes partes, generador, comercializador y usuario, quieren obtener los mayores beneficios. El mecanismo de cooperación entre agentes comercializadores bajo el enfoque de teoría de juegos cooperativa, logra establecer oportunidades para la mejora del sistema de comercializadores sin excluir funciones de optimización entre generadores, respetando los precios establecidos para los usuarios no regulados. Aunque el concepto de solución es complejo a nivel computacional, el Valor de Shapley garantiza la repartición equitativa para cada uno de los agentes, respetando sus intereses propios y los de la coalición.

La investigación realizada logró formular y desarrollar el modelo matemático para la cadena de suministro de la energía eléctrica en Colombia. El modelo matemático verifica la existencia de una solución factible para el modelo cooperativo. Analíticamente, se pudo demostrar que la solución factible obtenida mejora los resultados generados por el modelo de cooperación con optimización bi-nivel¹⁸, implementando una repartición equitativa de las utilidades, al tener en cuenta que los agentes que hacen parte de la coalición cooperan para minimizar todos aquellos gastos y costos en que incurrirían si trabajaran por separado.

¹⁸ Ver (GUZMAN, 2007).

Los resultados analíticos se validaron a través de un algoritmo, el cual se programó en Visual Studio 2005. La aplicación incorpora el procedimiento para el cálculo del Valor de Shapley para coaliciones de n jugadores, igualmente permite seleccionar la mejor manera de coalicionar entre los jugadores participantes. Aunque el cálculo del Valor de Shapley y la formación de coaliciones se convierte en un problema combinatorio, su eficiencia y la estabilidad que les brinda a los jugadores, hace de ella una herramienta valiosa dentro del algoritmo.

Los resultados obtenidos para esta situación en particular indican que los comercializadores dentro de la cadena de suministro de la energía eléctrica son capaces de formar integración vertical, para el cual es posible coordinar la negociación de la energía eléctrica de manera que esta se haga eficientemente y logrando que los usuarios finales estén al tanto, con anticipación, el contrato al cual están sujetos y el precio contratado, sin arriesgar un aumento del mismo en los horarios picos, para el cual antes no se garantizaba el cumplimiento de la cantidad pactada en la oferta de energía eléctrica por el comercializador.

Para futuras investigaciones, se deja el campo abierto para mejorar el procedimiento implementado con el fin de resolver problemas de mayores dimensiones, reduciendo así la complejidad computacional del algoritmo. Igualmente, se sugiere extender la cooperación entre comercializadores y llevarlo a otros niveles de la cadena, como por ejemplo, entre generadores, logrando así una mayor coordinación de la misma. Se propone extender este modelo de oferta a un modelo de precios para el cual se logren pactar los precios entre usuarios y comercializadores y observar la estabilidad del mercado eléctrico en estos modelos.

BIBLIOGRAFÍA

- AUBIN, J. P. (2007). *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. Mineola: Dover Ed.
- AUMANN, R., & HART, S. (1992). *Handbook of Game Theory: With Economic Applications* (Vol. 1). North-Holland: Elsevier Science, B.V., 733p.
- AVIV, Y. (2001). The Effect of Collaborative Forecasting on Supply Chain Performance. *Management Science* , 47 (10), 1326-1343.
- BARTHOLDI, J. J., & KEMAHHOGLU-ZIYA, E. (2004). Using Shapley Value to Allocate Savings in a Supply Chain. *Supply Chain Optimization* , 37p.
- BORENSTEIN, S. (2007, Abril). Customer risk from real-time retail electricity pricing: bill volatility and hedgability. *The Energy Journal* .
- BOYD, R. (2007, Abril). Emissions Trading Principles and Practice. *The Energy Journal* .
- BYMAN, B. (2000). Using distributed power quality monitoring for better electrical system management. (Pacific Engineering Corp);. (T. Yarborough, R. S. von Carolsfeld, & J. Van Gorp, Eds.) *IEEE Transactions on Industry Applications* , 36 (5), 1481-1485.
- CACHON, G. (2001). *Chapter 6: Supply Chain Coordination with Contracts*. USA: University of Pennsylvania.
- CACHÓN, G. (1999). *Competitive and Cooperative Inventory Management in a Two-Echelon Supply Chain with Lost Sales*. Fuqua School of Business.
- CACHON, G., & KÖK, A. G. (2006). Implementation of the Newsvendor Model with Clearance Pricing: How to (and how not to) Estimate Salvage Value. 29p.
- CACHON, G., & LARIVIERE, M. (2001). Contracting to assure supply: Share Demand Forecasts in a Supply Chain. *Management Science* , 47 (5), 629-646.
- CACHON, G., & LARIVIERE, M. (2005). Supply Chain Coordination with Revenue-Sharing Contracts: Strengths and Limitations. 51 (1), 30-44.
- CACHON, G., & LARIVIERE, M. (2005). Supply Chain Coordination with Revenue-Sharing Contracts: Strengths and Limitations. 51 (1), 30-44.
- CACHON, G., & NETESSINE, S. *Game Theory in Supply Chain Analysis*. University of Pennsylvania.

CACHON, G., & ZIPKIN, P. (1999). Competitive and cooperative inventory policies in a two-stage supply chain. *Management Science* , 936-953.

CONTRERAS, J. (1997). *A Cooperative Game Theory Approach to Transmission Planning in Power Systems*. University of California.

CONTRERAS, J. e. (2004). Numerical Solutions to Nash–Cournot Equilibria in Coupled Constraint Electricity Markets. *IEEE Transactions on Power Systems* , 19, 195-206p.

CONTRERAS, J., & WU, F. (2000). A Kernel-Oriented Algorithm for Transmission Planning. *IEEE Transactions on Power Systems* , 15 (4), 7p.

CONTRERAS, J., KLUSCH, M., & KRAWCZYK, J. (2004). Numerical Solutions to Nash-Cournot Equilibria in Coupled Constraint Electricity Markets. *IEEE Transactions on Power Systems* , 19 (1), 195-206.

DEBO, L. (1999). *Repeatedly selling to an impatient newsvendor when demand fluctuates: a supergame framework for co-operation in a supply chain*. Working Paper, Carnegie Mellon University.

DRIESEN, J. (1999). Electrical energy measurements in environments characterized by a deteriorated Power Quality. (T. Van Craenenbroeck, R. Belmans, & G. Deconinck, Eds.) *IEEE Conference Publication* (462), 115-118p.

FERNANDEZ GARCIA, J. R. (2000). *Complejidad y Algoritmos en Juegos Cooperativos*. Sevilla: Universidad de Sevilla, 234p.

FUDENBERG, D., & TIROLE, J. (1991). *Game Theory*. Massachusetts: MIT Press, 579p.

FUGATE, B., SAHIN, F., & MENTZER, J. (2005). Supply Chain Coordination Mechanisms. *University of Tennessee* .

GARDNER, R. (2003). *Games for Business and Economics* (2da ed.). Indiana, USA: Wiley.

GATELY, D. (1974). Sharing the gains from regional cooperation: A game theoretic application to planning investment in electric power. *International Economic Review* , 15 (1), 195-208p.

GECELCA S.A. (2007). *El ABC del negocio: “Mercado de Energía Mayorista”*. Presentación en Power Point, Universidad del Norte, Barranquilla.

GORADIA, H., & VIDAL, J. (2007). An Equal Excess Negotiation Algorithm for Coalition Formation. *AAMAS’07* (p. 3p.). Honolulu: IFAAMAS.

GUZMAN, L. (2007). *Modelo de Cooperación para el Sector Eléctrico entre Generadores y Comercializadores*. Tesis de Grado presentada como requisito para optar al título de Máster de Ingeniería Industrial, Universidad del Norte, Departamento Ingeniería Industrial, Barranquilla.

- HART, S., & MAS-COLLEL, A. (1988). The potential of the Shapley Value. (A. Roth, Ed.) *The Shapley Value*, 127-137.
- HULSHORST, W. S., & WOLSE, J. (2007). *Premium Power Quality Contracts and Labeling*. European Copper Institute. Arnhem: KEMA Consulting.
- KARLIN, S. (1987). *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*. Mineola, NY: Dover Phoenix Editions, 386p.
- KLUSCH, M., & SHEHORY, O. (1996.). A polynomial kernel-oriented coalition algorithm for rational information agents. *Proceedings of the 2nd International Conference on Multi-Agent Systems*. Kyoto, Japan.
- LARIO, e. (1999). La Optimización de la Cadena de Suministro bajo Incertidumbre: El Proyecto Schuman. *III Jornadas de Ingeniería de Organización*, (p. 8p.). Barcelona.
- LINDROOS, M. (2000). *Nash Equilibria for a coalitional game on Atlanto-Scandian herring*. Helsinki University of Technology, Systems Analysis Laboratory Research Reports. Hut: Helsinki University of Technology.
- METZLER, C., HOBBS, B., & PANG, H.-S. (2003). Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearize DC Network with Arbitrage: Formulations and Properties. *Networks and Spatial Economics*, 123-150p.
- MINISTERIO DE MINAS Y ENERGIA. (2007, Mayo 25). Generalidades del sector del Estado Empresario al Estado Regulador. Bogotá.
- MULLER, A., SCARSIN, M., & SHAKED, M. (2002). The newsvendor game has a nonempty core. *Games and Economic Behavior*, 38, 118-126.
- OWEN, G. (1995). *Game Theory* (3rd Edition ed.). San Diego: Academic Press, 447p.
- PAPADIMITRIOU, C., & STEIGLITZ, K. (1998). *Combinatorial Optimization*. Mineola: Dover Publications, 496p.
- PELEG, B., & SUDHÖLTER, P. (2007). *Introduction to the theory of cooperative games* (2nd ed.). Berlin: Springer, 328p.
- PROEXPORT COLOMBIA. (2007, Marzo 12). Energía Eléctrica. Bogotá, Colombia: Andi Colombia.
- SHEHORY, O., & KRAUS, S. *Coalition formation among autonomous agents: Strategies and complexity*. Ramat Gan, Israel: Bar Ilan University.
- SKVARENINA, T. L. (2002). Electrical power quality experiments. *ASEE Annual Conference Proceedings* (pp. 5511-5522p.). Vive L'ingenieur: Purdue University.

VELASQUEZ, J. M. (2000). *Condiciones matemáticas de los problemas de equilibrio: Aplicaciones en el sector energético*. Documento de Trabajo DW-DT-009-003, DecisionWare Ltd., Bogotá.

WEIBURG, C. (1991). Distributed Utility: technology, customer, and public policy changes shaping the electrical utility of tomorrow. (J. J. Iannucci, & M. M. Reading, Eds.) *Energy Systems and Policy* , 15 (4), 307-322p.

ZACCOUR, G., & PINEAU, P.-O. (2007, Julio). An oligopolistic electricity market model with interdependent segments. *The Energy Journal* .

ANEXO A. PSEUDOCÓDIGO MODELO STACKELBERG COOPERATIVO

MAIN ()

Inicializar Valores.

Ir al PASO 1.

Ir al PASO 2.

Ir al PASO 3.

Ir al PASO 4.

Ir al PASO 5.

Haga

Ir al PASO 6.

Para $j = 1$ Hasta N_c

If $S_r^w(m_max, j) = 0$ then $j \in CA$

FinPara

// CA es el conjunto de agentes que no se encuentran en la coalición líder.

count = $|S_r^w|$ // número de subcoaliciones en la ronda r.

Haga

Ir al PASO 7.

Ir al PASO 3.

Ir al PASO 4.

Ir al PASO 5.

Loop Until $w = count - 1$

Ir al PASO 8.

Si $V_max_r > V_max_{r-1}$ entonces

$S_{r+1}^0 \leftarrow S_r^{w-max}$

$r \leftarrow r + 1$

$w \leftarrow 0$

Si no

$L_j \leftarrow \{m_max_{r^}\}$*

// L_j es el conjunto de agentes que han sido líderes en las rondas anteriores

Si $|L_j| < N_c$ entonces

$V_max_r \leftarrow 0$

```

 $r \leftarrow r + 1$ 
 $S_r^0 \leftarrow S_{r^*}^0$ 
 $r^* \leftarrow r$ 
Para  $l = 1$  Hasta  $N_c$ 
    Si  $l \notin L_j$  entonces
         $m_{\max_r} \leftarrow l$ 
         $l \leftarrow N_c$ 
    Fin Si
FinPara
Si no
     $ronda \leftarrow r$ 
    Ir al PASO 9.
    Para  $m = 1$  Hasta  $N_c$ 
        Si  $agentes\_t(m) < 1$ 
            Ir al PASO 10.
        Si no
            Para  $j = 1$  Hasta  $N_c$ 
                Si  $S_{\max}(i, j) = 1$  entonces
                     $SV\_agent(j) \leftarrow VJ(i)$ 
                FinSi
            FinPara
        FinSi
    FinPara
     $stop \leftarrow true$ 
Fin Si
Fin Si
Loop Until  $stop = true$ 

```

Inicializar Valores :

Ng // número de generadores
Nc // número de comercializadores
Nu // número de usuarios no regulados

Sc // número de subcoaliciones
 r // número de la ronda
 w // coalición en la ronda r
 $count$ // número de subcoaliciones en la ronda r .
 $c_g(i, j)$ // precio de la energía vendida del generador i al comercializador j
 $c_m(j, k)$ // precio de la energía vendida del comercializador j al usuario k
 $g(i, j)$ // cantidad de energía vendida del generador i al comercializador j
 $c(j, k)$ // cantidad de energía vendida del comercializador j al usuario k
 $costo(j)$ // costo de energía comprada por el comercializador j
 $costo_s(m)$ // costo de energía asignada a la subcoalición m
 $m_r^w(m, k)$ // cantidad de energía vendida de la subcoalición m al usuario k
 $cap_g(i)$ // capacidad del generador i
 $dem(k)$ // demanda del usuario k
 $i = 1, \dots, Ng; j = 1, \dots, Nc; k = 1, \dots, Nu; m = 1, \dots, Sc;$
 $registros_sh(j) \leftarrow \frac{Nc!}{j!(Nc-j)!} \quad \forall j$ // la función de la combinatoria para el número de grupos formados por j jugadores.

$$p(i) \leftarrow \frac{((i-1)!(Nc-i)!)}{Nc!}$$

PASO 1. Optimización de los generadores

-Resolver el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{j=1}^n g(i, j) c_g(i, j) \\
 & \max \left(\sum_{k=1}^{Nu} c(j, k) c_m(j, k) - \sum_{i=1}^{Ng} g(i, j) c_g(i, j) \right) \quad \forall j = 1, \dots, Nu
 \end{aligned}$$

SA

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j=1}^n g(i, j) \leq cap_g(i) \quad \forall i = 1, \dots, Ng \\
 & \sum_{i=1}^{Ng} g(i, j) = \sum_{k=1}^{Nu} c(j, k) \quad \forall j = 1, \dots, Nc
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{Nu} c(j,k) = dem(k) \quad \forall k = 1, \dots, r$$

$$\sum_{k=1}^{Nu} c(j,k) c_m(j,k) - \sum_{i=1}^{Ng} g(i,j) c_g(i,j) \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, Nc$$

$$g(i,j), c(j,k) \geq 0 \quad \forall i, j, k$$

-Con los resultados de esta optimización, las cantidades optimizadas son valores fijos para nuestra siguiente optimización, de la siguiente manera:

$$costo(j) = \sum_i g(i,j) c_g(i,j) \quad \forall j$$

PASO 2. Coaliciones Iniciales

La coalición inicial es formada de esta manera:

$$S_r^w(m, j) = \begin{cases} 1 & m = j \\ 0 & i < j \end{cases} \quad m, j = 1 \dots Nc, r = 0, w = 0$$

Si $S_r^w(m, j) = 1$, el comercializador j pertenece a la subcoalición i en la coalición w de la ronda r

PASO 3. Calcular precios y costos de la coalición

Calcular el precio, $p_s_r^w(m, k)$, que cada una de las subcoaliciones m le ofrecerán al usuario k en la coalición w de la ronda r .

$$p_s_r^w(m, k) = \max_{j \in S_m} [c_m(j, k)] \quad \forall m$$

$$costo_s(m) = \sum_{j \in S_m} costo(j) \quad \forall m$$

PASO 4. Optimización entre comercializadores.

- Resolver el siguiente problema de optimización

$$Max \quad V_S_r^w = \sum_m \sum_k p_s_r^w(m, k) m_r^w(m, k) - \sum_m costo_s(m)$$

S.A.

$$\sum_m m_r^w(m, k) = dem(k) \quad \forall k$$

$$\sum_i \sum_{j \in S} g(i, j) = \sum_k m_r^w(m, k) \quad \forall m$$

$$m_r^w(m, k) \geq 0 \quad \forall k, m$$

PASO 5: Registrar el valor del juego

Para $i = 1$ *Hasta* N_c

Para $j = 1$ *Hasta* N_c

Si $S_r^w(i, j) = 1$ *Entonces*

$valor_temp(i, w) \leftarrow valor_temp(i, w) + [p_s_r^w(i, j)m_r^w(i, j) - costo_s(i)]$
 $agentes(i, w) \leftarrow agentes(i, w) + 1$

Fin Si

Fin Para

Fin Para

//En el siguiente procedimiento se registra la contribución del nuevo agente a la coalición.

Para $i = 1$ *Hasta* N_c

Si $agentes(i, w) = 1$ *Y* $r = 0$ *Entonces*

$valor(1, j) \leftarrow valor_temp(i, w)$

$a(j, j, 1) \leftarrow j$

Si no

Si $agentes(i, w) \geq 2$ *Entonces*

$s \leftarrow 0$

Para $k = 1$ *Hasta* $agentes(i, w)$

Si $k = 1$ *Entonces*

Para $j = 1$ *Hasta* N_c

Si $S_r^w(i, j) = 1$ *Entonces*

Para $m = 1$ *Hasta* $j - 1$

$s \leftarrow s + (N_c - agentes(i, w)) - m + 1$

Fin Para

Fin Si

Fin Para

Si no

Para $j = 2$ *Hasta* N_c

Si $S_r^w(i, j) < 1$ *Entonces*

$s \leftarrow s + (N_c - j)$

```

                                Si no
                                Fin Para
                                FinSi
                                Fin Para
                                Fin Si
                                Fin Para
                                Fin Si
                                Fin Si
                                Para j = 1 Hasta Nc
                                Si  $S_r^w(i, j) = 1$  Entonces
                                    Si  $\text{valor}(\text{agentes}(i, w), s) < \text{valor\_temp}(i, w)$  entonces
                                         $\text{valor}(\text{agentes}(i, w), s) \leftarrow \text{valor\_temp}(i, w)$ 
                                         $a(s, j, \text{agentes}(i, w)) \leftarrow j$ 
                                    Fin Si
                                Fin Si
                                Fin Para
                                Fin Para

```

PASO 6: Se obtiene a la subcoalición líder.

-Con los resultados de la optimización, se obtiene la subcoalición líder, a partir de ella se crearan las otras posibles coaliciones:

$$m_max_r = \arg \max_i \text{valor_temp}(i)$$

Para j = 1 Hasta Nc

$$\text{Si } S_r^w(m_max, j) = 0 \text{ entonces } j \in CA$$

Fin Para

// CA es el conjunto de agentes que no se encuentran en la coalición líder.

PASO 7. Generar una nueva coalición.

$$\text{count} = |S_r^w| \quad // \text{número de subcoaliciones en la ronda } r.$$

$$w = w + 1$$

$$S_r^w \leftarrow S_r^0$$

$$S_r^w(m, CA(w)) \leftarrow 0 \forall m$$

Si $m_max < CA(w)$ entonces

$$S_r^w(m_max, CA(w)) \leftarrow 1$$

Fin Si

// Este procedimiento genera todas las posibles coaliciones utilizando el líder de las coaliciones, m_max_r .

PASO 8. Una mejor solución es encontrada en la ronda r.

// Este procedimiento registra los valores por cada subcoalición de la coalición ganadora de la ronda.

$$V_max_r = \max_w V_S_r^w$$

$$w_max_r = \arg \max_w V_S_r^w$$

Para $i = 1$ Hasta N_c

$$valor_sub_r(i) \leftarrow valor_temp(i, w_max)$$

$$agentes_r(i) \leftarrow agentes(i, w_max)$$

Fin Para

PASO 9. Seleccionar la coalición ganadora

// Se obtiene la coalición ganadora, es decir, la que obtenga un mayor beneficio a lo largo de todas las rondas. Igualmente, se registran las subcoaliciones que la conforman y el número de agentes que tiene cada una.

$$Valor_max \leftarrow 0$$

Para $r = 1$ Hasta ronda

$$Si Valor_max < V_max_r^{w_max} \text{ Entonces}$$

$$Valor_max \leftarrow V_max_r^{w_max}$$

$$S_max(i, j) \leftarrow S_r^{w_max}(i, j)$$

Para $i = 1$ Hasta N_c

$$VJ(i) \leftarrow valor_sub_r(i)$$

$$agentes_t(i) \leftarrow agentes_r(i)$$

Fin Para

Fin Si

Fin Para

PASO 10. Calcular el Valor de Shapley

// Para calcular el Valor de Shapley, anteriormente se ha registrado una matriz $a(l, k, i)$, la cual registra el agente que pertenece en la coalición l en la posición k con número agentes i . También se ha registrado una matriz $valor(i, l)$, la cual registra el valor de la coalición l con número agentes i . Este valor es el que se obtiene al guardar el máximo valor de los diferentes subgrupos al hacer las optimizaciones entre los comercializadores.

Para $i = 1$ Hasta $agentes_t(i)$

Para $j = 1$ Hasta Nc

Si $S_max(i, j) = 1$ Entonces

Si $i = 1$ Entonces

$Pot(i, j) \leftarrow valor(1, j)$

Si no

Para $l = 1$ Hasta $registros(i)$

Para $k = 1$ Hasta Nc

Si $a(l, k, i) = j$ Entonces

$v_temp(l) \leftarrow valor(i, l)$

Si no

$a_sec(l, k) \leftarrow a(l, k, i)$

FinSi

Fin Para

indicador \leftarrow falso

Para $temp = 1$ Hasta $registros$

Para $k = 1$ Hasta Nc

Si $a(temp, k, i - 1) <> a_sec(l, k)$ Entonces

$indicador \leftarrow verdadero$

FinSi

Fin Para

Si $indicador = falso$ Entonces

$v_temp(l) \leftarrow v_temp(l) - valor(i - 1, temp)$

FinSi

Fin Para

$VS(i, j) \leftarrow VS(i, j) + v_temp(l)$

```

                                Fin Para
                            Fin Si
                        Fin Si
                    Fin Para
                Para  $j=1$  Hasta  $N_c$ 
                    Para  $i=1$  Hasta  $N_c$ 
                         $SV\_agent(j) \leftarrow SV\_agent(j) + VS(i, j)p(i)$ 
                    Fin Para
                Fin Para

```

ANEXO B. INFORME GENERADO POR VISUAL STUDIO 2005

Índice	Conjunto	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Total
0	111111	80.591,34	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	80.591,34
1	111112	73.652,82	5.767,87	0,00	0,00	0,00	0,00	79.420,69
2	111121	74.029,25	5.057,84	0,00	0,00	0,00	0,00	79.087,08
3	111122	67.341,77	11.483,10	0,00	0,00	0,00	0,00	78.824,87
4	111123	67.386,96	5.080,95	5.859,12	0,00	0,00	0,00	78.327,02
5	111211	43.075,13	34.705,03	0,00	0,00	0,00	0,00	77.780,16
6	111212	36.040,75	40.808,88	0,00	0,00	0,00	0,00	76.849,62
7	111213	35.607,20	34.506,45	5.862,64	0,00	0,00	0,00	75.976,29
8	111221	37.233,87	40.661,50	0,00	0,00	0,00	0,00	77.895,37
9	111222	30.807,77	47.425,73	0,00	0,00	0,00	0,00	78.233,49
10	111223	30.144,03	40.832,68	5.817,14	0,00	0,00	0,00	76.793,85
11	111231	36.959,92	34.508,34	5.076,17	0,00	0,00	0,00	76.544,43
12	111232	30.148,21	40.967,52	5.259,44	0,00	0,00	0,00	76.375,17
13	111233	29.804,90	34.552,41	11.556,07	0,00	0,00	0,00	75.913,38
14	111234	29.920,45	34.648,21	5.072,81	5.926,59	0,00	0,00	75.568,06
15	112111	72.717,39	6.510,83	0,00	0,00	0,00	0,00	79.228,22
16	112112	65.983,46	12.990,23	0,00	0,00	0,00	0,00	78.973,69
17	112113	66.124,77	6.522,56	5.869,64	0,00	0,00	0,00	78.516,98
18	112121	66.014,06	11.682,54	0,00	0,00	0,00	0,00	77.696,61
19	112122	59.169,72	18.694,94	0,00	0,00	0,00	0,00	77.864,66
20	112123	59.327,20	11.622,01	5.864,87	0,00	0,00	0,00	76.814,07
21	112131	66.150,89	6.522,87	5.051,70	0,00	0,00	0,00	77.725,46
22	112132	59.326,54	13.021,49	5.068,34	0,00	0,00	0,00	77.416,37
23	112133	59.353,94	6.532,36	11.534,66	0,00	0,00	0,00	77.420,95
24	112134	59.472,31	6.439,02	5.061,21	5.871,34	0,00	0,00	76.843,88
25	112211	35.915,60	42.073,98	0,00	0,00	0,00	0,00	77.989,58
26	112212	29.672,98	49.275,61	0,00	0,00	0,00	0,00	78.948,59
27	112213	29.050,42	42.218,22	5.800,29	0,00	0,00	0,00	77.068,93
28	112221	29.945,87	48.565,39	0,00	0,00	0,00	0,00	78.511,27
29	112222	23.579,80	55.135,84	0,00	0,00	0,00	0,00	78.715,64
30	112223	23.506,39	48.642,58	5.880,44	0,00	0,00	0,00	78.029,41
31	112231	29.956,55	42.218,25	5.319,89	0,00	0,00	0,00	77.494,68
32	112232	23.506,39	48.751,50	5.182,43	0,00	0,00	0,00	77.440,33
33	112233	23.367,74	42.316,82	11.610,40	0,00	0,00	0,00	77.294,96
34	112234	23.344,47	42.328,62	5.228,33	5.854,94	0,00	0,00	76.756,35
35	112311	35.548,41	6.528,14	34.516,89	0,00	0,00	0,00	76.593,43
36	112312	28.684,03	12.931,81	34.560,75	0,00	0,00	0,00	76.176,59
37	112313	28.987,94	6.167,94	40.975,86	0,00	0,00	0,00	76.131,75
38	112314	28.697,92	6.296,65	34.621,69	5.836,42	0,00	0,00	75.452,67
39	112321	29.562,74	11.742,21	34.571,76	0,00	0,00	0,00	75.876,70
40	112322	23.058,43	18.755,37	34.603,10	0,00	0,00	0,00	76.416,90
41	112323	23.342,61	11.823,24	41.228,32	0,00	0,00	0,00	76.394,16
42	112324	22.972,36	11.911,23	34.639,90	5.829,49	0,00	0,00	75.352,98
43	112331	29.899,36	6.169,78	40.841,87	0,00	0,00	0,00	76.911,01

Índice	Conjunto	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Total
44	112332	23.315,92	12.898,91	40.926,44	0,00	0,00	0,00	77.141,27
45	112333	23.627,73	6.113,37	47.481,28	0,00	0,00	0,00	77.222,38
46	112334	23.283,95	6.116,23	40.942,20	5.845,41	0,00	0,00	76.187,79
47	112341	29.554,46	6.311,67	34.617,59	5.160,88	0,00	0,00	75.644,60
48	112342	22.979,21	12.888,41	34.620,90	5.273,89	0,00	0,00	75.762,42
49	112343	23.285,41	6.116,23	41.076,96	5.245,07	0,00	0,00	75.723,67
50	112344	22.438,80	6.437,81	35.164,85	11.592,37	0,00	0,00	75.633,84
51	112345	22.929,05	6.155,88	34.664,46	5.240,21	5.840,35	0,00	74.829,95
52	121111	65.653,33	12.659,63	0,00	0,00	0,00	0,00	78.312,96
53	121112	59.892,24	18.946,19	0,00	0,00	0,00	0,00	78.838,43
54	121113	59.145,18	12.552,50	5.899,27	0,00	0,00	0,00	77.596,95
55	121121	58.942,58	18.479,62	0,00	0,00	0,00	0,00	77.422,20
56	121122	52.346,00	25.158,38	0,00	0,00	0,00	0,00	77.504,38
57	121123	52.353,83	18.386,88	5.862,64	0,00	0,00	0,00	76.603,36
58	121131	59.037,17	12.537,37	5.069,90	0,00	0,00	0,00	76.644,45
59	121132	52.467,71	19.378,87	5.035,20	0,00	0,00	0,00	76.881,78
60	121133	52.239,13	12.491,30	11.528,27	0,00	0,00	0,00	76.258,70
61	121134	52.431,14	12.446,62	5.072,44	5.867,53	0,00	0,00	75.817,74
62	121211	29.061,83	48.934,14	0,00	0,00	0,00	0,00	77.995,97
63	121212	22.314,98	55.392,10	0,00	0,00	0,00	0,00	77.707,08
64	121213	22.314,98	48.993,87	5.880,44	0,00	0,00	0,00	77.189,29
65	121221	23.043,71	55.306,91	0,00	0,00	0,00	0,00	78.350,62
66	121222	17.474,91	61.536,84	0,00	0,00	0,00	0,00	79.011,75
67	121223	16.369,59	55.113,82	5.824,03	0,00	0,00	0,00	77.307,45
68	121231	23.043,30	48.996,12	5.180,90	0,00	0,00	0,00	77.220,32
69	121232	16.525,18	55.392,10	5.294,32	0,00	0,00	0,00	77.211,59
70	121233	16.525,18	48.993,87	11.598,28	0,00	0,00	0,00	77.117,33
71	121234	16.550,04	49.083,39	5.271,94	5.830,71	0,00	0,00	76.736,08
72	121311	28.713,88	12.845,50	34.889,41	0,00	0,00	0,00	76.448,78
73	121312	21.998,03	19.070,68	34.606,50	0,00	0,00	0,00	75.675,21
74	121313	22.580,06	12.216,21	41.426,35	0,00	0,00	0,00	76.222,61
75	121314	21.921,74	12.331,39	34.641,59	5.827,55	0,00	0,00	74.722,27
76	121321	23.014,15	18.312,81	34.606,23	0,00	0,00	0,00	75.933,19
77	121322	16.372,92	25.033,81	34.759,16	0,00	0,00	0,00	76.165,90
78	121323	16.525,18	18.291,20	41.141,34	0,00	0,00	0,00	75.957,72
79	121324	16.520,65	18.277,17	34.757,26	5.875,91	0,00	0,00	75.431,00
80	121331	23.059,88	12.288,88	40.932,47	0,00	0,00	0,00	76.281,23
81	121332	15.659,23	18.841,89	41.204,48	0,00	0,00	0,00	75.705,59
82	121333	16.525,18	12.323,64	47.403,48	0,00	0,00	0,00	76.252,30
83	121334	16.525,18	12.323,64	41.005,26	5.880,44	0,00	0,00	75.734,51
84	121341	23.030,54	12.331,50	34.641,46	5.263,20	0,00	0,00	75.266,70
85	121342	16.551,31	19.051,40	34.753,78	5.205,91	0,00	0,00	75.562,40
86	121343	16.525,18	12.323,64	41.141,34	5.182,43	0,00	0,00	75.172,59
87	121344	16.446,32	12.275,57	34.706,21	11.610,30	0,00	0,00	75.038,39
88	121345	16.420,09	12.267,01	34.716,11	5.230,61	5.853,67	0,00	74.487,48
89	122111	57.596,86	19.965,56	0,00	0,00	0,00	0,00	77.562,42
90	122112	50.733,89	26.785,36	0,00	0,00	0,00	0,00	77.519,25
91	122113	51.039,61	19.823,91	5.862,64	0,00	0,00	0,00	76.726,16

Índice	Conjunto	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Total
92	122121	51.251,48	25.669,03	0,00	0,00	0,00	0,00	76.920,51
93	122122	44.660,03	32.501,16	0,00	0,00	0,00	0,00	77.161,19
94	122123	44.530,31	25.490,38	5.862,64	0,00	0,00	0,00	75.883,34
95	122131	51.081,22	19.824,41	5.076,19	0,00	0,00	0,00	75.981,83
96	122132	44.529,37	26.601,20	5.076,19	0,00	0,00	0,00	76.206,77
97	122133	44.385,96	19.778,89	11.529,21	0,00	0,00	0,00	75.694,06
98	122134	44.599,62	19.699,78	5.070,61	5.869,27	0,00	0,00	75.239,27
99	122211	21.612,31	56.713,14	0,00	0,00	0,00	0,00	78.325,45
100	122212	15.047,43	62.823,05	0,00	0,00	0,00	0,00	77.870,48
101	122213	15.001,69	56.471,14	5.781,90	0,00	0,00	0,00	77.254,72
102	122221	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
103	122222	7.989,19	68.691,40	0,00	0,00	0,00	0,00	76.680,59
104	122223	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
105	122231	15.676,46	56.633,08	5.338,66	0,00	0,00	0,00	77.648,20
106	122232	8.052,54	62.585,05	5.294,60	0,00	0,00	0,00	75.932,20
107	122233	9.122,18	56.412,27	11.543,96	0,00	0,00	0,00	77.078,41
108	122234	9.122,10	56.443,48	5.169,83	5.847,13	0,00	0,00	76.582,54
109	122311	21.585,78	19.448,19	34.628,13	0,00	0,00	0,00	75.662,10
110	122312	15.089,61	26.254,40	34.757,12	0,00	0,00	0,00	76.101,13
111	122313	15.123,90	19.445,96	41.139,46	0,00	0,00	0,00	75.709,32
112	122314	15.090,57	19.465,56	34.765,63	5.880,44	0,00	0,00	75.202,19
113	122321	15.672,64	25.405,99	34.757,62	0,00	0,00	0,00	75.836,25
114	122322	9.122,18	32.400,41	34.545,91	0,00	0,00	0,00	76.068,49
115	122323	8.881,17	25.675,61	41.288,27	0,00	0,00	0,00	75.845,05
116	122324	8.718,35	25.448,09	34.656,48	5.820,89	0,00	0,00	74.643,81
117	122331	15.721,07	19.561,05	41.004,07	0,00	0,00	0,00	76.286,18
118	122332	8.924,29	26.198,95	40.996,98	0,00	0,00	0,00	76.120,22
119	122333	8.917,85	19.700,70	47.403,48	0,00	0,00	0,00	76.022,03
120	122334	8.917,85	19.700,70	41.005,26	5.880,44	0,00	0,00	75.504,24
121	122341	15.675,19	19.463,04	34.765,64	5.182,42	0,00	0,00	75.086,29
122	122342	8.959,46	26.287,41	34.655,66	5.289,43	0,00	0,00	75.191,95
123	122343	8.911,97	19.702,52	41.146,10	5.179,49	0,00	0,00	74.940,07
124	122344	8.920,06	19.691,21	34.759,78	11.621,88	0,00	0,00	74.992,93
125	122345	8.917,85	19.688,43	34.760,95	5.186,98	5.877,91	0,00	74.432,11
126	123111	57.711,71	12.524,52	6.538,15	0,00	0,00	0,00	76.774,38
127	123112	51.077,59	19.341,12	6.538,15	0,00	0,00	0,00	76.956,86
128	123113	50.884,80	12.484,20	13.028,07	0,00	0,00	0,00	76.397,06
129	123114	51.075,51	12.442,67	6.455,68	5.866,88	0,00	0,00	75.840,74
130	123121	51.120,93	18.389,60	6.538,15	0,00	0,00	0,00	76.048,68
131	123122	44.522,31	25.157,04	6.511,06	0,00	0,00	0,00	76.190,41
132	123123	44.339,33	18.375,42	13.028,16	0,00	0,00	0,00	75.742,91
133	123124	44.552,90	18.341,35	6.455,23	5.867,44	0,00	0,00	75.216,91
134	123131	50.911,01	12.484,01	11.622,49	0,00	0,00	0,00	75.017,51
135	123132	44.340,71	19.315,16	11.622,49	0,00	0,00	0,00	75.278,36
136	123133	44.323,25	12.484,01	18.723,18	0,00	0,00	0,00	75.530,45
137	123134	44.371,08	12.432,76	11.643,09	5.864,55	0,00	0,00	74.311,48
138	123141	51.109,97	12.443,00	6.455,11	5.075,20	0,00	0,00	75.083,29
139	123142	44.554,17	19.297,38	6.455,12	5.075,21	0,00	0,00	75.381,88

Índice	Conjunto	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Total
140	123143	44.372,17	12.432,86	13.021,96	5.085,34	0,00	0,00	74.912,33
141	123144	44.647,44	12.428,55	6.161,34	11.491,26	0,00	0,00	74.728,60
142	123145	44.455,49	12.397,93	6.407,41	5.059,90	5.885,27	0,00	74.206,00
143	123211	21.622,94	48.993,87	6.116,23	0,00	0,00	0,00	76.733,04
144	123212	15.093,29	55.392,10	6.116,23	0,00	0,00	0,00	76.601,61
145	123213	15.093,29	48.993,87	12.856,71	0,00	0,00	0,00	76.943,87
146	123214	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
147	123221	15.674,64	55.304,66	6.116,74	0,00	0,00	0,00	77.096,04
148	123222	9.122,18	61.523,32	6.349,75	0,00	0,00	0,00	76.995,24
149	123223	9.122,18	55.102,58	12.890,67	0,00	0,00	0,00	77.115,44
150	123224	9.122,18	55.146,31	6.316,35	5.847,13	0,00	0,00	76.431,97
151	123231	15.715,91	48.800,09	11.981,35	0,00	0,00	0,00	76.497,35
152	123232	9.122,18	55.173,17	11.906,66	0,00	0,00	0,00	76.202,01
153	123233	9.120,34	48.774,59	18.724,70	0,00	0,00	0,00	76.619,63
154	123234	9.128,19	48.802,87	11.850,21	5.848,02	0,00	0,00	75.629,29
155	123241	15.719,34	49.116,87	6.116,23	5.305,42	0,00	0,00	76.257,86
156	123242	9.122,18	55.204,39	6.316,35	5.169,83	0,00	0,00	75.812,74
157	123243	9.122,18	48.806,16	12.921,91	5.169,83	0,00	0,00	76.020,07
158	123244	9.122,18	48.806,16	6.316,35	11.564,80	0,00	0,00	75.809,49
159	123245	9.122,18	48.812,39	6.282,99	5.159,43	5.859,63	0,00	75.236,62
160	123311	21.625,43	12.250,76	42.345,06	0,00	0,00	0,00	76.221,25
161	123312	15.093,29	19.026,95	42.375,79	0,00	0,00	0,00	76.496,03
162	123313	15.093,29	12.361,76	48.751,50	0,00	0,00	0,00	76.206,55
163	123314	15.093,29	12.361,76	42.375,79	5.880,44	0,00	0,00	75.711,28
164	123321	15.674,93	18.333,05	42.375,79	0,00	0,00	0,00	76.383,77
165	123322	8.917,85	24.960,71	42.375,79	0,00	0,00	0,00	76.254,35
166	123323	8.682,44	18.467,69	48.751,11	0,00	0,00	0,00	75.901,23
167	123324	8.917,85	18.448,09	42.375,79	5.880,44	0,00	0,00	75.622,17
168	123331	15.685,11	12.386,68	48.642,54	0,00	0,00	0,00	76.714,33
169	123332	8.917,85	18.944,15	48.642,58	0,00	0,00	0,00	76.504,58
170	123333	8.917,85	12.424,18	55.040,81	0,00	0,00	0,00	76.382,84
171	123334	8.916,98	12.436,04	48.653,35	5.883,72	0,00	0,00	75.890,09
172	123341	15.675,12	12.361,24	42.375,79	5.182,43	0,00	0,00	75.594,58
173	123342	8.933,53	18.933,70	42.395,58	5.167,50	0,00	0,00	75.430,30
174	123343	8.917,85	12.424,18	48.751,50	5.182,43	0,00	0,00	75.275,96
175	123344	8.917,95	12.424,53	42.376,08	11.623,18	0,00	0,00	75.341,73
176	123345	8.917,85	12.424,18	42.375,79	5.182,43	5.880,44	0,00	74.780,69
177	123411	21.634,72	12.326,74	6.129,87	34.647,02	0,00	0,00	74.738,35
178	123412	15.093,29	19.026,95	6.116,23	34.765,63	0,00	0,00	75.002,09
179	123413	15.082,08	12.301,11	12.920,71	34.724,96	0,00	0,00	75.028,86
180	123414	15.093,29	12.361,76	6.116,23	41.141,34	0,00	0,00	74.712,62
181	123415	15.083,54	12.282,05	6.116,23	34.731,73	5.862,12	0,00	74.075,67
182	123421	15.674,93	18.333,05	6.116,23	34.765,63	0,00	0,00	74.889,83
183	123422	8.951,12	25.003,49	6.116,23	34.677,70	0,00	0,00	74.748,53
184	123423	8.917,85	18.448,09	12.942,70	34.765,63	0,00	0,00	75.074,27
185	123424	8.860,81	18.471,18	6.094,50	41.171,22	0,00	0,00	74.597,70
186	123425	8.917,85	18.448,09	6.116,23	34.765,63	5.880,44	0,00	74.128,23
187	123431	15.656,71	12.299,43	11.867,64	34.724,48	0,00	0,00	74.548,27

Índice	Conjunto	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Total
188	123432	8.917,85	18.944,15	11.827,61	34.765,63	0,00	0,00	74.455,24
189	123433	8.917,85	12.424,18	18.789,29	34.765,63	0,00	0,00	74.896,95
190	123434	8.930,79	12.476,81	11.798,88	41.185,07	0,00	0,00	74.391,55
191	123435	8.917,85	12.424,18	11.827,61	34.765,63	5.880,44	0,00	73.815,70
192	123441	15.674,93	12.360,84	6.116,23	41.005,26	0,00	0,00	75.157,25
193	123442	8.917,85	18.944,15	6.116,23	41.005,26	0,00	0,00	74.983,48
194	123443	8.917,85	12.424,18	12.942,70	41.005,26	0,00	0,00	75.289,99
195	123444	8.917,85	12.424,18	6.116,23	47.403,48	0,00	0,00	74.861,74
196	123445	8.917,85	12.424,18	6.116,23	41.005,26	5.880,44	0,00	74.343,95
197	123451	15.659,12	12.280,16	6.116,23	34.731,34	5.215,79	0,00	74.002,63
198	123452	8.917,85	18.944,15	6.116,23	34.765,63	5.182,43	0,00	73.926,28
199	123453	8.917,85	12.424,18	12.942,70	34.765,63	5.182,43	0,00	74.232,78
200	123454	8.920,09	12.432,30	6.116,87	41.145,86	5.179,39	0,00	73.794,50
201	123455	8.917,85	12.424,18	6.116,23	34.765,63	11.623,15	0,00	73.847,03
202	123456	8.917,85	12.424,18	6.116,23	34.765,63	5.182,43	5.880,44	73.286,75